

CAPÍTULO 1

ELEMENTOS BÁSICOS PARA EL ANÁLISIS DE LOS SISTEMAS DE POTENCIA

1.1 Definición de Sistema de Potencia

Comprende el conjunto de elementos mecánicos, eléctricos y electrónicos que permiten desarrollar coordinadamente las siguientes tareas:

- Transformar las diferentes clases de energía
- Transportar la energía eléctrica
- Distribuir la energía eléctrica
- Interconectar las diferentes áreas de producción y consumo
- Negociar la energía eléctrica tanto en bolsa como a través de contratos bilaterales.
- Controlar, supervisar y gobernar en forma particular cada uno de los elementos del sistema de generación, transmisión, subtransmisión y distribución y en forma global para obtener en cada momento las mejores condiciones de operación, tanto en estado estable como en el transitorio.

1.2 Componentes básicos que integran los sistemas eléctricos

1.2.1 Turbina

En ésta la energía primaria proveniente de fuentes hidráulicas, térmicas, atómicas, es transformada en energía mecánica.

1.2.2 El generador

Constituido por una parte estática y otra rotativa, acopladas entre si magnéticamente, sirve para la transformación de la energía mecánica entregada por la turbina en el eje de su rotor en energía eléctrica.

Los rotores se construyen de polos salientes o polos lisos (cilíndricos), lo cual implica para máquinas de igual capacidad diferentes valores de las correspondientes inercias.

Este complejo electromagnético entrega en sus bornes una potencia eléctrica cuya magnitud puede variarse entre cero y un límite máximo, manteniendo constante en lo posible la tensión terminal. La estabilización de la tensión terminal en un determinado valor se logra con la acción del llamado regulador de tensión. La estabilización de la frecuencia de la tensión en 60 Hz se logra a través de la acción del llamado regulador de velocidad.

1.2.3 Las Subestaciones

Son los centros de acopio y distribución de la potencia eléctrica que se quiere distribuir a los usuarios y puede ser del tipo elevador y reductor.

En las subestaciones elevadoras, la potencia entregada por los generadores a tensiones medias entre (11 - 25 Kv) son transformadas a niveles de tensión muy superiores para permitir su transmisión económica a las áreas de consumo. En las subestaciones reductoras (115 - 500 Kv) se permite captar las potencias provenientes de uno o varios centros de generación, para que una vez transformados a nivel de tensión apropiado puedan distribuirse a los usuarios o sub-transmitirse a otras regiones.

Componentes de las Subestaciones.

- El transformador de potencia.

Permite convertir niveles de tensión medios en altos, bajos y viceversa. Además y según el diseño cumplen funciones de regulación bien sea de la magnitud de la tensión primaria o secundaria, afectando el flujo de potencia reactiva o bien, regulando los flujos de potencia activa y reactiva.

- Interruptores de Potencia.

En condiciones normales de trabajo, estos elementos permiten abrir o cerrar un circuito eléctrico para "interrumpir" cuando sea conveniente o necesario el flujo de potencia en determinadas partes del sistema. En condiciones anormales de trabajo abren automáticamente para valores determinados de sobrecarga o corto circuito aislando el elemento de funcionamiento normal.

- Los Seccionadores.

Aislan partes vivas del sistema eléctrico de partes que temporalmente deben estar fuera de servicio. Los seccionadores no se diseñan para interrumpir corrientes de falla; ellos se pueden maniobrar sólo cuando los circuitos donde están actuando han sido abiertos.

- Pararrayos.

Controlan sobretensiones de carácter atmosférico o por maniobras, evitando la propagación de oscilaciones que ponen en peligro la vida de los equipos.

- Transformadores de Potencial y de corriente.

Permiten realizar mediciones de los valores eficaces o magnitudes fasoriales de los parámetros correspondientes a la tensión y a la corriente y sirven además para emprender tareas de protección al alimentar los relés.

- Barrajes.

En cada subestación se pueden distinguir diferentes (2 o 3) niveles de tensión según la salida de los transformadores.

A cada nivel de tensión se asocia un barraje, al cual confluyen (o de donde parten) diferentes alimentadores trayendo (llevando) potencia de (a) otros centros de generación o consumo.

Para garantizar la continuidad de la operación de la subestación, el barraje correspondiente a cada nivel de tensión puede duplicarse o si se quiere seccionarse en tramos.

1.2.4 Líneas de Transmisión

La energía generada en las centrales eléctricas es llevada a los centros de consumo por medio de líneas de transmisión, y cuyos valores de tensión empleados típicamente en su operación son los siguientes: (500 KV, 220 KV, 110 KV), subtransmisión (66 KV, 57.5 KV, 34.5 KV), o distribución (13.2 KV, 11.4 KV), debidamente diseñadas para garantizar niveles de tensión aceptables.

La transmisión de energía puede hacerse utilizando sistemas trifásicos con líneas de circuito sencillo o circuito doble o sistemas de corriente continua.

1.2.5 Sistema de manejo de energía

En los últimos años han sido implementados sofisticados sistemas computarizados con el fin de supervisar el estado de trabajo de la red, adquirir sus datos más importantes y procesarlos para definir políticas óptimas de trabajo de la red y ejercer acciones correctivas en caso de que se presenten anomalías o disturbios durante la operación. Así que este sistema de manejo ejerce una acción de vigilancia sobre la red a fin de garantizar una operación segura, anteponiéndose a través de simulaciones a posibles eventos que pudieran ocurrir en la red.

1.3 Fuentes de energía primaria

Los recursos primarios son muy variados en naturaleza, de diferentes ciclos de renovación y de costos muy diferentes.

1.3.1 Recursos primarios hidráulicos

Representados por el tipo de embalse, de regulación multianual, anual o filo de agua.

1.3.2 Recursos Térmicos

Representados por:

- Gas natural
- Petróleo residual pesado o fuel oil pesado
- Fuel Oil liviano
- Carbón
- Uranio
- Basuras desperdicios

1.3.3 Energías “no convencionales renovables”

Representadas por:

- Energía Solar
- Energía Geotérmica
- Energía de Biomasa
- Energía Eólica
- Energía Maremotriz

1.4 Definición de conceptos básicos

Se definen algunos conceptos básicos, necesarios para la comprensión de los siguientes capítulos.

1.4.1 Nodo Eléctrico

Es un punto de convergencia eléctrica donde se conectan elementos del sistema que están al mismo potencial.

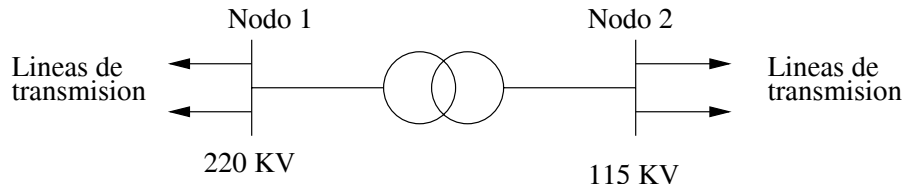


Figura 1.1: Representación de nodo eléctrico

Los elementos que se conectan a un nodo son: Generadores, cargas, reactores inductivos, condensadores, transformadores, líneas y elementos FACTS.

En un sistema eléctrico, la potencia se genera normalmente a una determinada tensión y por razones técnico-económicas se transmite a una tensión superior a las áreas de consumo.

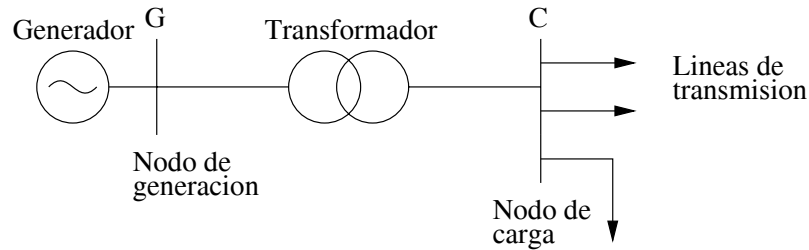


Figura 1.2: Representación de un esquema nodal

Si se desprecia el efecto de los conductores de conexión, los bornes del generador coinciden con los bornes del primario del transformador constituyendo un llamado “Nodo de Generación”, mientras en el secundario da origen a otro nodo llamado “Nodo de Carga” por cuanto allí es donde la potencia generada se puede “consumir” o “transferir”.

La potencia generada en el nodo G es “inyectada” en el barraje G a través del transformador, generalmente en la representación de los sistemas de potencia se omite el transformador y se presenta el nodo generador de la siguiente forma:

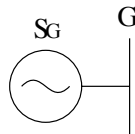


Figura 1.3: Representación del nodo generador

La potencia demandada y la potencia que es transferida entre nodos o de intercambio son:
 S_{Dc}, S_{c-k}

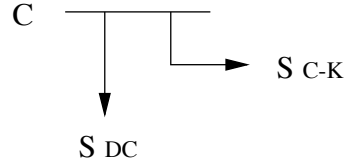


Figura 1.4: Representación del nodo de carga

Las posibles relaciones entre inyecciones de potencia, potencia demandada y potencia transferida son:

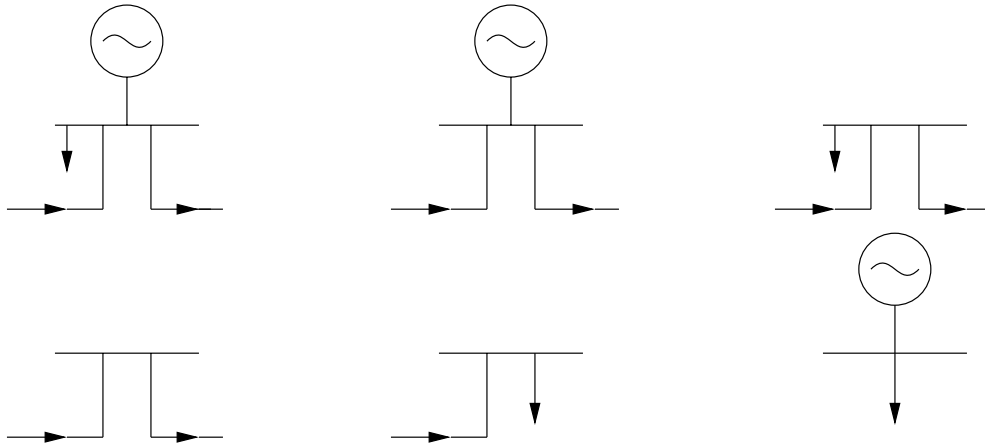


Figura 1.5: Representación de los tipos de nodo

1.4.2 Configuración de un sistema de potencia

Se entiende como la totalidad de elementos físicos para generación, transmisión y distribución de energía que se encuentran instalados en el sistema y en cualquier momento pueden ser utilizados para el servicio.

1.4.3 Topología

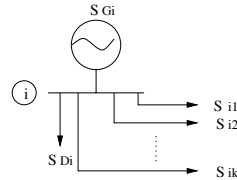
Se define el estado de conexión momentánea de los elementos físicos del sistema que integran su “configuración” o estructura física.

1.4.4 Punto de operación

Se entiende como el valor instantáneo de los parámetros y variables del sistema (voltaje y potencia). $(V_1, V_2, \dots, V_n, S_{G1}, \dots, S_{Gm}, S_{D1}, \dots, S_{Dn})$ que determinan durante su funcionamiento el balance global entre la totalidad de la potencia generada, la demandada y las pérdidas.

Además de lo anterior se garantiza para cada nodo en particular el cumplimiento de la ecuación de balance nodal y para el sistema el balance total de potencia activa y reactiva.

- Balance nodal: $S_{G_i} - S_{D_i} = \sum_{j=1}^n S_{ij}$



- Balance global: $\sum_{i=1}^m S_{G_i} - \sum_{j=1}^R S_{D_j} - S_L = 0$

donde: m (número de generadores), R (número de potencias demandadas) y S_L (Pérdidas globales).

1.4.5 Sistema de Potencia Elemental

Corresponde a un sistema constituido por un generador y una carga conectados por un sistema de transformadores y línea.

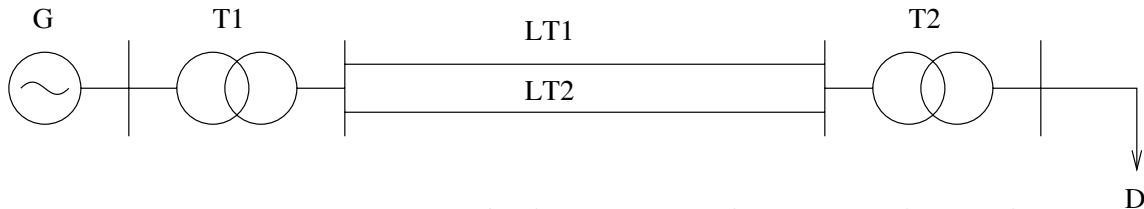


Figura 1.6: Representación de un sistema de potencia elemental

1.4.6 El Sistema enmallado

Es un sistema en el cual los nodos están conectados a través de varios caminos.

Entre las ventajas del sistema enmallado se tienen:

- Alta confiabilidad en la alimentación de los usuarios
- Gran fortaleza eléctrica a las posibles contingencias
- Disponibilidad de recursos propios

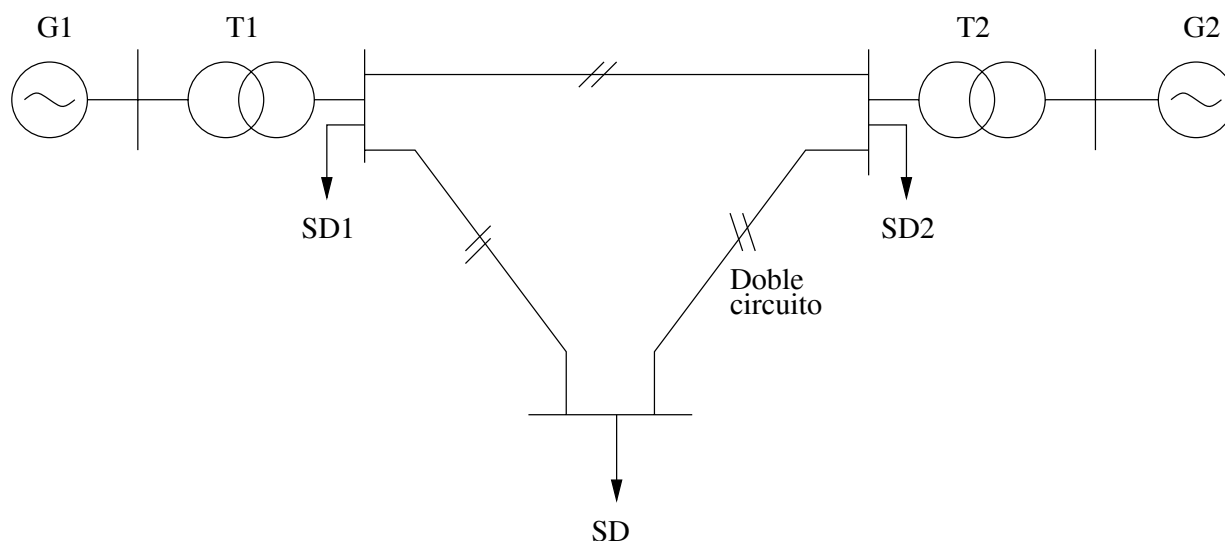


Figura 1.7: Representación de un sistema de enmallado

Un sistema enmallado o interconectado se representa de forma general de la siguiente manera

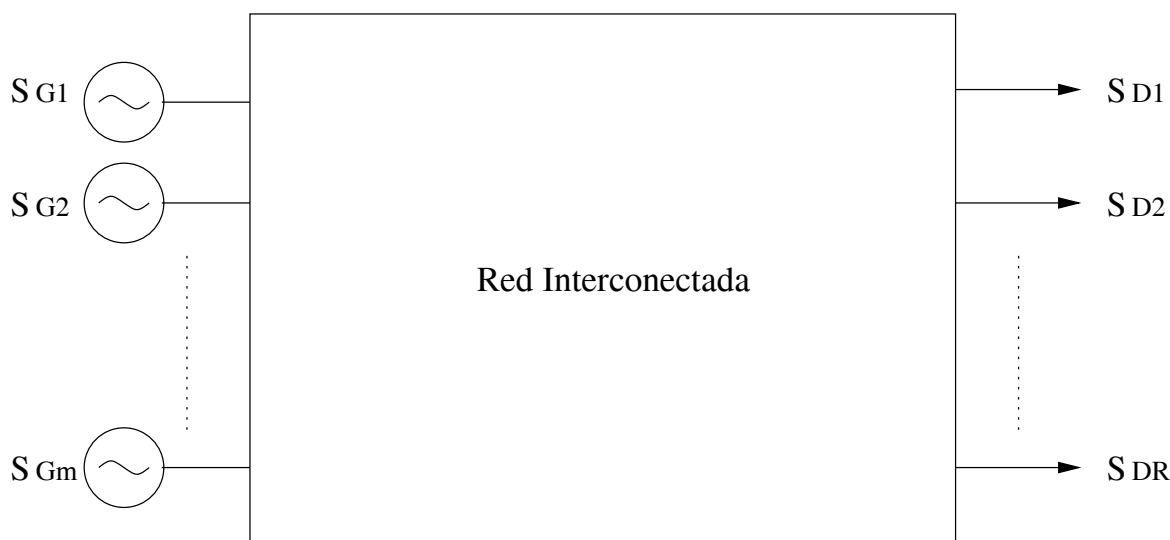


Figura 1.8: Representación de una red interconectada

1.4.7 Sistema radial

Corresponde a un sistema en el cual todos los nodos están conectados a través de un único camino. Este tipo de estructura de red se emplea generalmente en sistemas de distribución a fin de facilitar su operación.

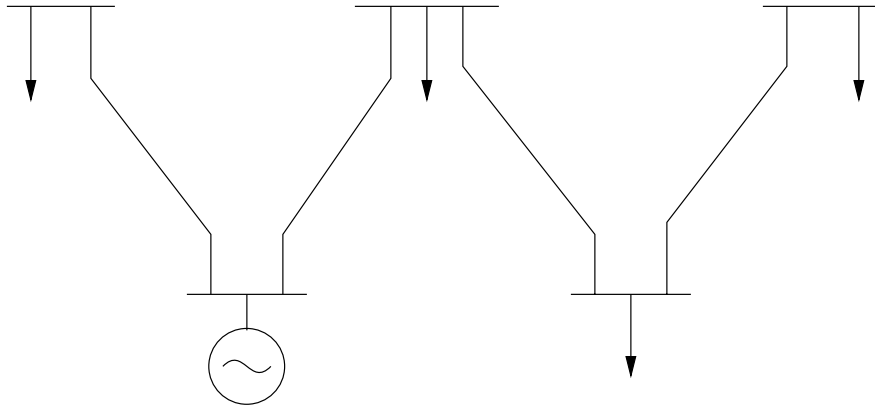


Figura 1.9: Representación de un sistema radial

1.4.8 Sistema de Potencia Interconectado

Corresponde a la interconexión de dos sistemas que pueden operar independientemente a través de líneas de interconexión.

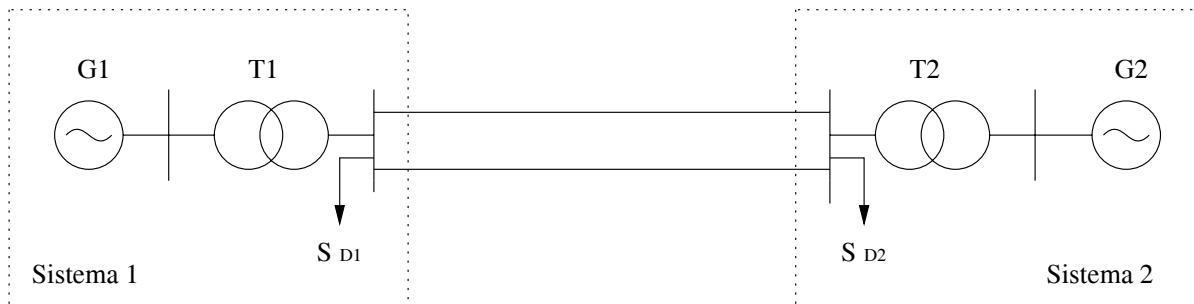


Figura 1.10: Representación de un sistema de potencia interconectado

De forma más general se pueden interconectar áreas a través de líneas de interconexión. Estas áreas representan un país o un sistema de gran tamaño con mucha generación y demanda.

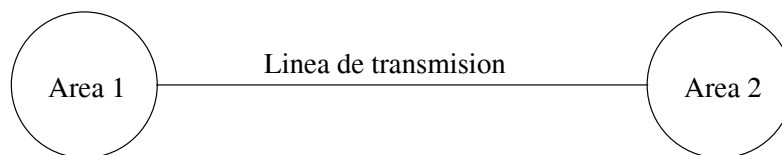


Figura 1.11: Representación de una interconexión de áreas

Entre las ventajas de la interconexión entre áreas se tienen:

- Uso racional a lo largo del tiempo de toda la energía primaria existente en el sistema integrado.

- Intercambio de energía de regiones con superávit a regiones deficitarias.
- Utilización óptima de recursos de potencia reactiva.
- Uso apropiado de recursos de Transmisión y distribución.
- Utilización óptima de las Plantas de Generación.

1.4.9 Potencia neta inyectada

Puede presentarse una situación en la cual en un nodo cualesquiera del sistema se inyecte una potencia generada S_{Gi} que se consume a través de una carga (potencia S_{Di}) y a través de las líneas de interconexión que están asociadas a dicho nodo i , que llegan (o salen de él) flujos de potencia provenientes (o hacia) otros nodos del sistema.

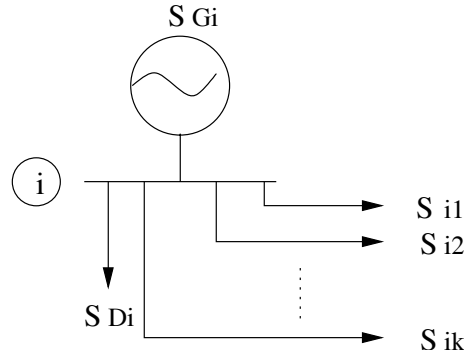


Figura 1.12: Representación de la potencia neta inyectada en un nodo

para el nodo i en cuestión se define la “potencia neta inyectada” a la diferencia entre la potencia generada en ese nodo y la potencia allí demandada.

$$S_{Gi} - S_{Di} = S_{Ni}$$

Esta potencia neta corresponde a la suma fasorial de todas las potencias que entran o salen del nodo i a través de las líneas interconectadas a él

$$S_{Ni} = \sum_{j=1}^l S_{ij} - \sum_{k=1}^t S_{ki}$$

En la formulación j y k sólo incluyen los nodos que tienen unión física con el nodo i .

Si se desagrega la potencia S_{Ni} , en sus componentes real e imaginaria:

$$S_{Ni} = P_{Ni} + jQ_{Ni}$$

potencia neta activa y reactiva inyectada en el nodo i

$$P_{Ni} = P_{Gi} - P_{Di} \quad Q_{Ni} = Q_{Gi} - Q_{Di}$$

En el nodo i puede darse el caso particular de no tener una de las componentes básicas: generación o carga, o ninguna de éstas.

1.5 Clasificación de las variables nodales

En el caso más general, el nodo i de un sistema eléctrico puede estar caracterizado por 6 variables, a saber:

$$P_{Gi}, Q_{Gi}, P_{Di}, Q_{Di}, |V_i|, \theta_i$$

Donde θ_i es el ángulo de desfase de la tensión medido respecto a un eje coordenadas que se desplaza en el espacio angular a la velocidad de la frecuencia nominal del sistema.

Los parámetros anteriormente mencionados dan origen a la siguiente clasificación de variables:

- Variables no controladas o de perturbación P_{Di}, Q_{Di}
- Variables de control P_{Gi}, Q_{Gi}
- Variables de estado $|V_i|, \theta_i$

Estas últimas son aquellas variables dependientes (afectadas por las variables de control y de perturbación) con cuyo conocimiento se puede estimar el estado del sistema, es decir las condiciones de operación en un determinado momento: flujos de potencia, corrientes a través de las líneas, pérdidas, etc.

1.6 Sistemas de referencia

Dado que las tensiones nodales son fasores, es necesario utilizar sistemas de referencia para la magnitud y el ángulo.

Es costumbre utilizar como referencia para las magnitudes de las tensiones el nodo de tierra. Al nodo de tierra se le asigna una magnitud de voltaje igual a cero.

La posición angular del fasor de la tensión nodal se mide respecto a un sistema de ejes de coordenadas que se desplaza en el espacio angular a la frecuencia nominal del sistema de potencia (60 hz).

1.7 Clasificación de los nodos en un sistema de potencia

Si en un sistema eléctrico de potencia se conocen las admitancias de las líneas de la red y las tensiones nodales, se pueden determinar no sólo las corrientes que fluyen entre los nodos sino también las potencias netas en cada uno de ellos.

Entonces, es evidente que en cualquier tipo de nodo del sistema puede establecerse la relación de la potencia neta del nodo en función de las tensiones nodales y de las admitancias de las líneas de transmisión que interconectan el nodo en cuestión con otros nodos del sistema, esto es:

$$S_{Ni} = f(V_1, \dots, V_n, Y_{i1}, \dots, Y_{ik}, \dots, Y_{in})$$

En consecuencia, por cada nodo sólo podrán establecerse dos ecuaciones, una para la potencia activa y otra para potencia reactiva:

$$P_{Ni} = f_i(V_i, Y)$$

$$Q_{Ni} = f_i(V_i, Y)$$

Estas ecuaciones son formuladas en función de las variables nodales y parámetros de red.

$$P_{Gi}, Q_{Gi}, P_{Di}, Q_{Di}, |V_i|, \theta_i$$

Siendo: $P_i = P_{Gi} - P_{Di}$ y $Q_i = Q_{Gi} - Q_{Di}$

Por tanto por cada nodo se establece:

- Dos ecuaciones escritas en función de las variables nodales
- Seis variables y parámetros de red

Para solucionar el sistema de ecuaciones resultantes se requiere que 4 de las variables nodales asuman valores conocidos.

Esto se simplifica al saber que las variables no controlables del sistema, es decir las cargas nodales son conocidas, basados en lo anterior se tiene que el número de variables se reduce en 2 y ahora el número de variables no conocidas es 4.

$$P_{Gi}, Q_{Gi}, |V_i|, \theta_i$$

Algunas combinaciones de estas cuatro variables, tomados de dos en dos, siendo dos conocidas y las otras dos desconocidas, dan lugar a la siguiente clasificación básica de los nodos:

- Nodo de potencia neta inyectada: (P, Q)
- Nodo de magnitud de voltaje controlado o de generación (P, V) . En este nodo los límites de potencia reactiva podrán considerarse libres o restringidos, (Q_{Gmin}, Q_{Gmax}) . De esta forma el nodo podrá ser estudiado bajo estas dos alternativas.
- Nodo flotante o regulador (V, θ)

1.8 Restricciones Físicas de los sistemas de potencia

- Límites de voltaje

$$V_{min} \leq V \leq V_{max}$$

El límite superior corresponde al nivel básico de aislamiento (BIL). El límite inferior a la estabilidad del sistema y requerimientos en la operación de la carga.

Para mantener la tensión se recurre a:

- Control de reactivos de generación
- Condensadores estáticos
- Variaciones de las derivaciones de los taps de los transformadores bajo carga, etc.
- límites de las derivaciones de los transformadores en fase y desfasadores
- límites térmicos de las líneas de transmisión (expresada potencia o corriente)
- límites de Generación (potencia activa y reactiva)
- La frecuencia se considera constante (60 hz)

1.9 Relaciones Nodales en un Sistema de Potencia mediante la matriz de admitancia Nodal Y_N

El hecho de que los componentes de un sistema de potencia estén acoplados electromagnéticamente hace que las variaciones que se presenten en cualquier elemento o en el valor de algunos de los parámetros del sistema, se propaguen a las partes restantes del sistema.

La intensidad del efecto depende entre otros de la distancia eléctrica existente entre los elementos. Un cambio en los parámetros de generación o carga influenciará en los valores resultantes para las tensiones nodales.

El efecto de estos cambios se puede observar conociendo las relaciones matemáticas existentes entre los parámetros de la red.

1.9.1 Determinación de las relaciones entre corrientes y tensiones nodales en un sistema interconectado

Las relaciones existentes entre las tensiones nodales, las corrientes netas inyectadas en cada nodo y los parámetros de las admitancias de las líneas, se determinan aplicando a la red las leyes de Kirchhoff.

- Primera Ley: Nodo i : $\sum_{k=0}^n I_{ik} = 0$

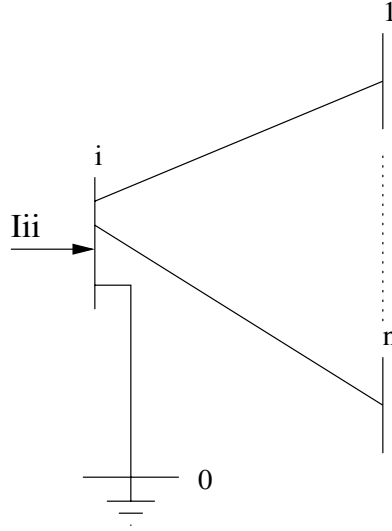


Figura 1.13: Representación de la primera ley de kirchhoff

$$-I_{i0} - I_{i1} \dots + I_{ii} \dots - I_{in} = 0 \quad (A)$$

- Segunda Ley y relación voltaje corriente

$$\text{Línea } i-k: I_{ik} = Y_{ik}(V_i - V_k) \quad (B)$$

Combinando la primera (A) y segunda ley de kirchhoff (B) y considerando Y_{ik} como la admitancia serie de la línea entre los nodos ik y Y_{i0} como la sumatoria de todas las admitancias que conectan al nodo i con la referencia, la cual incluye efectos shunt de las líneas, condensadores y reactores.

$$-Y_{i0}(V_i - V_o) - Y_{i1}(V_i - V_1) \dots + I_{ii} \dots - Y_{in}(V_i - V_n) = 0$$

Al despejar los voltajes nodales comunes y organizar la ecuación se obtiene:

$$Y_{i0}V_o + Y_{i1}V_1 \dots + Y_{in}V_n - (Y_{i0} + Y_{i1} \dots + Y_{in})V_i + I_{ii} = 0$$

$$-Y_{i0}V_o - Y_{i1}V_1 \dots + (Y_{i0} + Y_{i1} \dots + Y_{in})V_i - Y_{in}V_n = I_{ii}$$

La representación matricial es como sigue:

$$I_{ii} = \begin{bmatrix} Y_{i0} & Y_{i1} & \dots & Y_{ii} & \dots & Y_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

Siendo el valor de los terminos: $Y_{ii} = \sum_{j=0}^n y_{ij}$ y $Y_{ij} = -y_{ij}$.

Repitiendo este análisis para los demás nodos del sistema y argumentando en forma matricial

Corrientes Nodales = Matriz admitancia Nodal x Tensiones Nodales

$$\begin{bmatrix} I_{00} \\ I_{11} \\ \vdots \\ I_{ii} \\ \vdots \\ I_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{00} & Y_{01} & \dots & Y_{0i} & \dots & Y_{0n} \\ Y_{10} & Y_{11} & \dots & Y_{1i} & \dots & Y_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Y_{i0} & Y_{i1} & \dots & Y_{ii} & \dots & Y_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Y_{n0} & Y_{n1} & \dots & Y_{ni} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

Cuya notación es la siguiente:

$$I_N = Y_N * V_N$$

1.9.2 Algunas Características especiales de la matriz Y_{bus}

a) Características de la matriz Y_{bus} :

- Matriz cuadrada de tamaño (n x n) siendo n = el número de nodos. Si n incluye el nodo de referencia, la matriz sera indefinida.
- Simetrica
- Dispersa

b) Algoritmo para la formación de la matriz Y_{bus}

- Elementos de la diagonal: $Y_{kk} = \sum_{i=0}^n y_{ik}$
- Elementos fuera de la diagonal: $Y_{ki} = -y_{ki}$

Otro procedimiento para formar la matriz admitancia de nodos es como sigue:

$Y_{bus} = A^T y A$ siendo A: la matriz incidencia de barra y y la matriz admitancia primitiva.

Nota: Tal como se pudo observar en los desarrollos anteriores, se establece que la matriz Y_{bus} fue conformada con base en las dos leyes de kirchhoff, la relación voltaje - corriente y la conectividad de la red.

c) Aspectos a considerar en la Y_{bus}

- Propiedades de la matriz admitancia para incluir transformadores reguladores.
- Relaciones nodales donde existen transformadores de relación de transformación diferente de 1 p.u.
- Transformaciones y modificación de Y_{bus}
 - * Cambios en la topología.
 - Adición de elementos, Nodos y Acoplamientos mutuos
 - * Modificación debido a características especiales de los nodos del sistema
 - Cambio en el nodo de referencia
 - Nodos con voltaje conocido (Eliminar fila y columna)
 - Nodos sin inyección
 - Representación de carga o generación como admitancias constante

1.10 Relaciones Nodales en un Sistema de Potencia Mediante la Matriz de Impedancia Nodal

Se asume un nodo como el de referencia, generalmente el nodo 0, se invierte entonces la matriz admitancia nodal para determinar la matriz impedancia nodal.

$$I_N = Y_N * V_N$$

$$V_N = Y_N^{-1} * I_N$$

$$Z_N = Y_N^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & \cdots & \cdots & Z_{1n} \\ \cdots & & & \cdots \\ \cdots & & & \cdots \\ \cdots & & & \cdots \\ Z_{n1} & \cdots & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ \vdots \\ \vdots \\ I_{nn} \end{bmatrix}$$

Siendo que Z_{ik} depende de los elementos de la red, los cuales no corresponden a las impedancias de las líneas

$Y_{ik} = -y_{ik} = \frac{1}{z_{ik}}$ cierto para (Y_{Bus}) (siempre y cuando no existan acoples mutuos entre las líneas)

$$Z_{ik} = z_{ik} = \frac{1}{y_{ik}} \quad \text{falso para } (Z_{Bus})$$

En la matriz impedancia nodal, el elemento (i-k) corresponde a la impedancia eléctrica (de transferencia) entre dichos nodos.

1.10.1 Métodos para la formación de la matriz impedancia nodal

Impedancia nodal

- Formar Z_n a partir de Y_n ($Z_n = Y_n^{-1}$)
- Formar Z_n a partir de inyecciones de corrientes nodales
- Formar Z_n mediante la solución de ecuaciones lineales

1.11 Ecuaciones de potencias netas activas y reactivas en función de las tensiones nodales y parámetros de la red

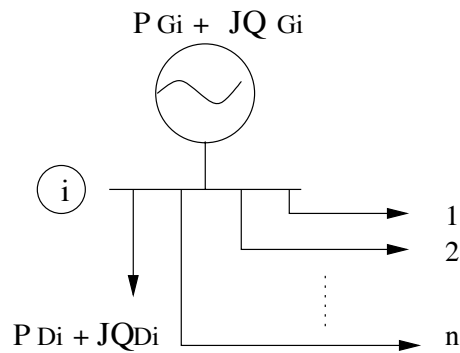


Figura 1.14: Representación del balance de potencia nodal

$$S_{Ni} = S_{Gi} - S_{Di}$$

Esta potencia neta es igual a la potencia neta de intercambio

$$S_{Ni} = V_i I_{ii}^*$$

Donde la corriente inyectada en el nodo i es definida como:

$$I_{ii} = \sum_{K=0}^n Y_{ik} V_k$$

Reemplazando la corriente inyectada se calcula la potencia inyectada así:

$$S_{Ni} = V_i \sum_{K=0}^n Y_{ik}^* V_k^*$$

Descompuesto en parte real e imaginario se obtiene:

$$P_{Ni} = P_{Gi} - P_{Di} = \text{real} \left(V_i \sum_{K=0}^n Y_{ik}^* V_k^* \right)$$

$$Q_{Ni} = Q_{Gi} - Q_{Di} = \text{Imag} \left(V_i \sum_{K=0}^n Y_{ik}^* V_k^* \right)$$

Nota: Estas ecuaciones podran ser expresadas en componentes polar o rectangular. Son del tipo algebraicas no lineales, por lo tanto requieren de procesos numéricos especiales.

1.12 Flujo de Potencia por una Línea

Correponde al flujo de potencia como función de la diferencia de tensión y la impedancia del elemento.

$$S_{ik} = P_{ik} + JQ_{ik} = V_i I_{ik}^*$$

Tal como se describio la ecuación anterior se asume el sentido del nodo (i) al nodo (k).

$$S_{ki} = P_{ki} + JQ_{ki} = V_k I_{ki}^*$$

Cálculo de pérdidas de potencia en la línea:

$$S_{L_{ik}} = S_{ik} + S_{ki}$$



Figura 1.15: Flujo de potencia que fluye por la sección serie en el modelo de la línea

1.12.1 Cálculo del flujo de potencia por una línea representada por su impedancia serie

El modelo matemático utilizado para el estudio de la línea de transmisión es el equivalente pi de parámetros concentrados, constituido por una impedancia serie y dos elementos paralelos conectados en los extremos de la misma. En esta parte despreciamos los elementos paralelos y la representamos por los parámetros serie, tal como se presenta a continuación:

Como impedancia: $z_{kl} = R_{kl} + jX_{kl}$ (Resistencia y reactancia)

Como admitancia: $y_{kl} = g_{kl} + jb_{kl}$ (Conductancia y susceptancia)

La conductancia y susceptancia serie se calculan así:

$$g_{kl} = \frac{R_{kl}}{R_{kl}^2 + X_{kl}^2}$$

$$b_{kl} = -\frac{X_{kl}}{R_{kl}^2 + X_{kl}^2}$$

Los voltajes nodales medidos respecto al sistema de referencia se escriben así:

$$\bar{V}_k = |V_k| \angle \theta_k = V_k e^{j\theta_k}$$

$$\bar{V}_L = |V_L| \angle \theta_L = V_L e^{j\theta_L}$$

El flujo de corriente por una línea es calculado como sigue:

$$I_{kL} = I_{kL}^{serie} = y_{kL}(\bar{V}_k - \bar{V}_L)$$

Efectuados algunos reemplazos en componentes polares y rectangulares se obtiene:

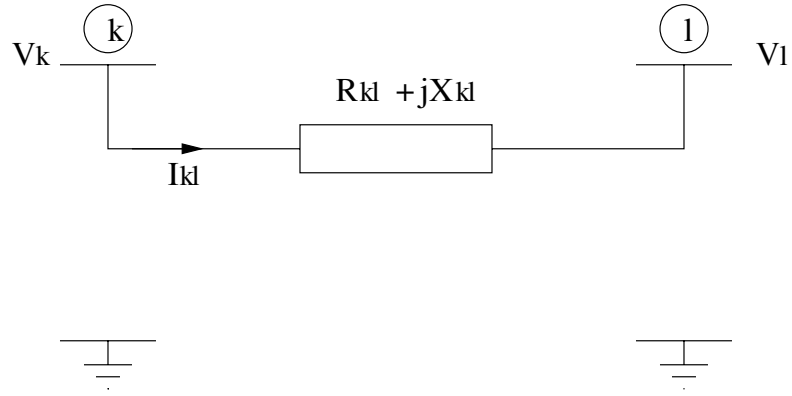


Figura 1.16: Modelo serie de la línea de transmisión

$$I_{kL} = (g_{kL} + jb_{kL})(V_k e^{j\theta_k} - V_L e^{j\theta_L})$$

La potencia compleja correspondiente es:

$$S_{kL}^* = \bar{V}_k^* I_{kL} = P_{kL} - jQ_{kL}$$

$$P_{kL} - jQ_{kL} = V_k e^{-j\theta_k} \left[(g_{kL} + jb_{kL})(V_k e^{j\theta_k} - V_L e^{j\theta_L}) \right]$$

El flujo de potencia activa y reactiva corresponde a:

$$P_{kL} = V_k^2 g_{kL} - V_k V_L g_{kL} \cos \theta_{kL} - V_k V_L b_{kL} \sin \theta_{kL}$$

$$Q_{kL} = -V_k^2 b_{kL} - V_k V_L g_{kL} \sin \theta_{kL} + V_k V_L b_{kL} \cos \theta_{kL}$$

Pérdidas de potencia activa y reactiva en la línea:

$$P_{kL} + P_{Lk} = g_{kL}(V_k^2 + V_L^2 - 2V_k V_L \cos \theta_{kL})$$

Que es equivalente a:

$$\text{Pérdidas activas: } P_{kL} + P_{Lk} = g_{kL} |V_k e^{j\theta_k} - V_L e^{j\theta_L}|^2$$

$$\text{Pérdidas reactivas: } Q_{kL} + Q_{Lk} = -b_{kL} |V_k e^{j\theta_k} - V_L e^{j\theta_L}|^2$$

1.13 Pérdidas en los Sistemas Eléctricos de Potencia en un Sistema Multinodal

- Pérdidas físicas (técnicas)
 - Efecto corona, Joule y núcleo de Transformadores
- Pérdidas negras (no técnicas)
 - descalibración de contadores, robo, daño de contadores, error de facturación, etc.

Para el sistema total se tiene:

$$S_L = \sum_{i=1}^m S_{Gi} - \sum_{j=1}^R S_{Dj}$$

$$S_L = \sum_{i=1}^n S_{Ni} = \sum_{i=1}^n V_i I_{ii}^*$$

$$S_L = V_N^T I_N^*$$

$$S_L = I_N^T Z_N I_N^*$$

1.14 Ejercicio Propuesto

Dado el siguiente sistema de cinco nodos y seis líneas y los valores de tensiones nodales, se pide determinar:

- La matriz admitancia nodal
- El vector de corrientes netas inyectadas
- El vector de potencias netas inyectadas
- Flujos de potencia por las líneas
- Pérdidas de potencia en la líneas
- Balance de potencia en la red

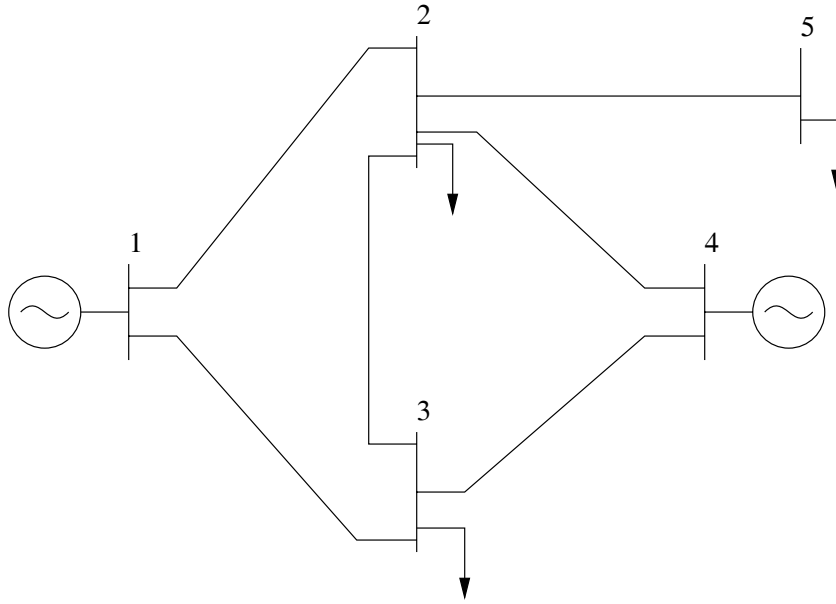


Figura 1.17: Red eléctrica de 5 nodos y 6 líneas

- Balance de potencia nodal
- Conformar la matriz impedancia nodal ($Z_{bus} = Y_{bus}^{-1}$)
- Verificar que $Y_{bus}Z_{bus} = I$ (Matriz identidad)

Datos del sistema:

línea	R_{ik}	X_{ik}	$y_{ik}^{sch}/2$
1 – 2	0.0316	0.2114	0.0505
1 – 3	0.0152	0.0944	0.036
2 – 3	0.0121	0.0700	0.042
2 – 4	0.0140	0.1250	0.048
2 – 5	0.0230	0.0550	0.023
3 – 4	0.0246	0.1500	0.089

$$P_{Base} = 100 \text{ MW}$$

Tensiones nodales

$$V_1 = 1.02\angle 0^\circ, \quad V_2 = 0.8675\angle -14.016^\circ, \quad V_3 = 0.9146\angle -10.173^\circ, \quad V_4 = 1.01\angle -6.1843^\circ, \\ V_5 = 0.800\angle -16.99^\circ$$

Potencias inyectadas en los nodos

$$S_{G_1} = 303 \text{ Mw} ; 159 \text{ Mvar}, \quad S_{D_2} = 200 \text{ Mw} ; 100 \text{ Mvar}, \quad S_{D_3} = 150 \text{ Mw} ; 70 \text{ Mvar}, \\ S_{G_4} = 160 \text{ Mw} ; 153 \text{ Mvar}, \quad S_{D_5} = 90 \text{ Mw} ; 60 \text{ Mvar}$$

CAPÍTULO 2

REPRESENTACIÓN DE LOS SISTEMAS ELÉCTRICOS

2.1 El Diagrama Unifilar

Los sistemas generalmente se representan así:

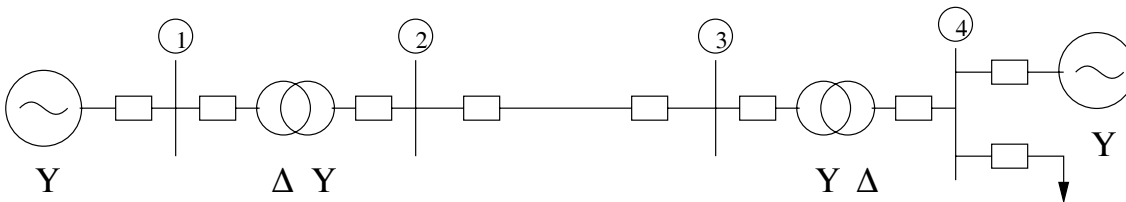


Figura 2.1: Representación de un sistema eléctrico

Este sistema también podría ser representado por un diagrama de impedancias trifásico o monofásico.

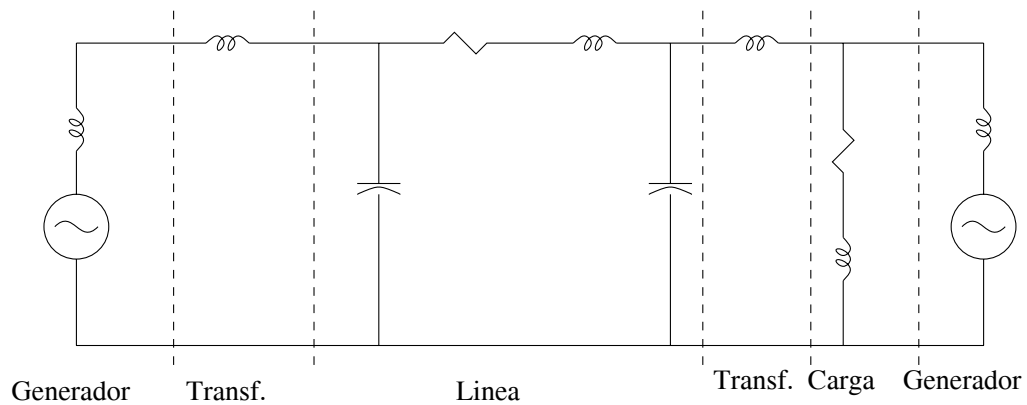


Figura 2.2: Representación de un diagrama de impedancias

Ya que los sistemas trifásicos son generalmente balanceados, basta con representarlo por un diagrama de impedancia por fase.

Este diagrama equivalente por fase puede ser simplificado al despreciar la línea del neutro y representar el sistema por símbolos normalizados o por sus circuitos equivalentes.

Algunos símbolos empleados en la representación de los diagramas equivalentes son:

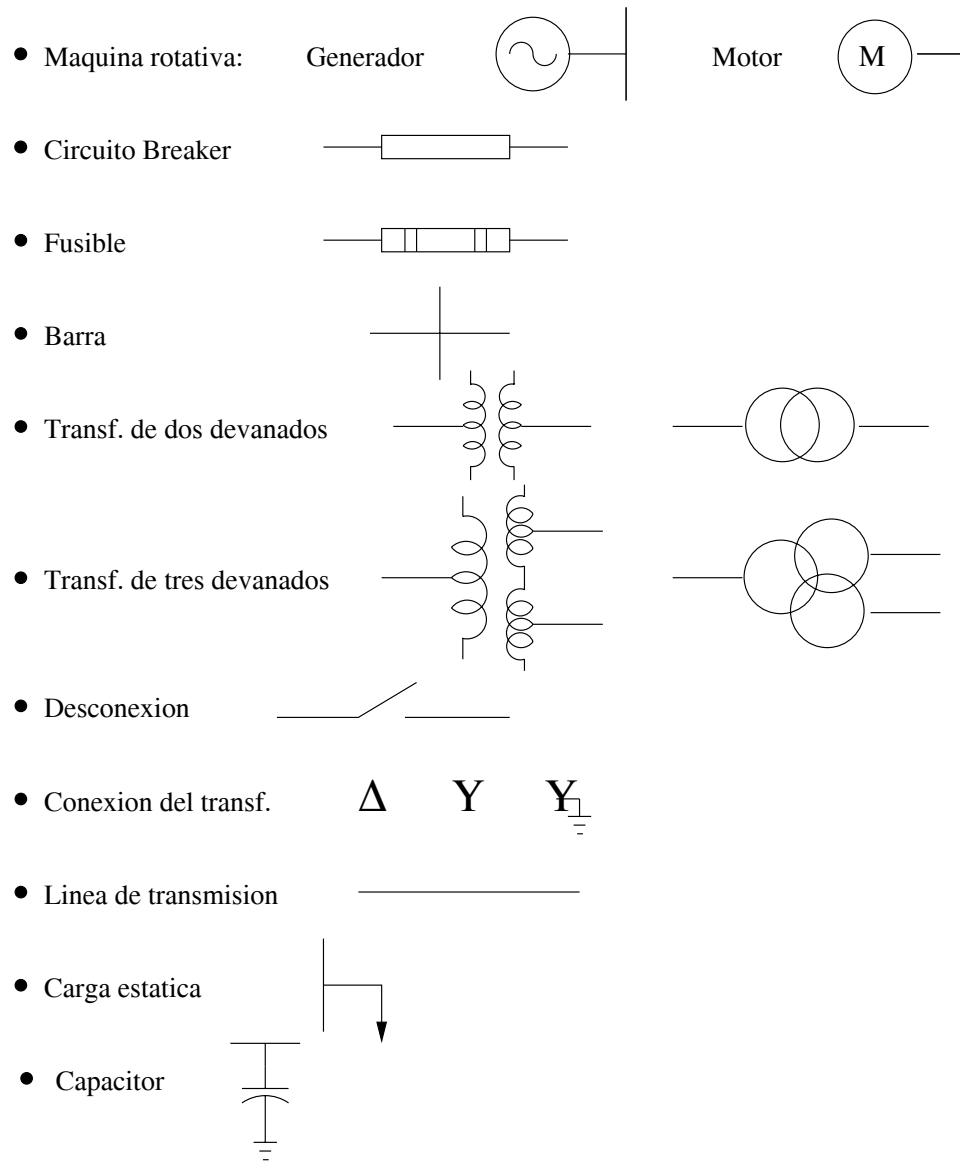


Figura 2.3: Símbolos empleados en la representación de sistemas eléctricos

El detalle del diagrama unifilar depende de los objetivos perseguidos con el estudio.

Como se representan los elementos del sistema eléctrico para efectos de análisis ?

Su representación es muy variada y depende del tipo de estudio a realizar, así por ejemplo en un estudio de flujo de carga, no se representan los interruptores o relés en el modelamiento

matemático, contrario si se emplea en un estudio de estabilidad donde juegan un papel muy importante.

Si el modelamiento es aplicado a un estudio de fallos no simétricos, se requiere definir la red de estado estacionario (secuencia positiva), así como tambien las redes de secuencia negativa y cero. Además se debe contar con información de estado transitorio y subtransitorio de los elementos dinámicos del sistema.

2.2 Modelaje de los elementos del Sistema

El modelaje es una de las áreas del análisis de sistemas eléctricos y se define como la representación matemática de los elementos de la red. La complejidad o simplicidad del modelo depende del grado de exactitud requerido así como la del tipo de estudio a realizar.

Cada elemento: Línea, transformador, generador, condensador, inductor, carga, etc, es modelado teniendo como base el tipo de aplicación, ya que cada aplicación requiere del desarrollo de modelos matemáticos especiales. En este texto se da por hecho que dichos modelos ya son conocidos.

Los tipos de representación empleados en estudios de flujo de carga y de corto circuito son los siguientes:

	Flujo de Carga (Representación)	Corto Circuito (Representación)
<i>Generador</i>	Inyección	(Impedancia + Voltaje)
<i>Línea</i>	Pi	Pi
<i>Transformador</i>	Z_{cc}	Z_{cc}
<i>Carga</i>	Inyección (S o I)	(Se desprecia o impedancia)
Elementos shunt	(Inyección o Impedancia)	(Se desprecia o impedancia)

2.2.1 Modelaje de líneas de transmisión

La línea de transmisión puede ser representada por el modelo π equivalente:

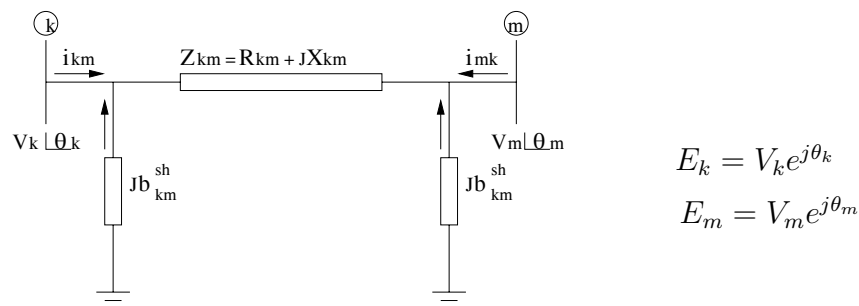


Figura 2.4: Modelo de la línea de transmisión

Como se vio en el primer capitulo, el modelo circuital de la línea de transmisión incluye una componente serie constituida por la resistencia y la reactancia, correspondiente al modelo simplificado. Para mejorar el modelo se incluye el efecto capacitivo de la línea denominado susceptancia y representado como: b_{km}^{sh} .

Cálculo de las corrientes i_{km} y i_{mk}

$$i_{km} = y_{km}(E_k - E_m) + jb_{km}^{sh} E_k$$

$$i_{mk} = y_{km}(E_m - E_k) + jb_{km}^{sh} E_m$$

Flujo de potencia entre las barras P_{km} , Q_{km}

$$S_{km}^* = P_{km} - jQ_{km} = E_k^* i_{km}$$

$$S_{km}^* = V_k e^{-j\theta_k} \left[y_{km}(V_k e^{j\theta_k} - V_m e^{j\theta_m}) + jb_{km}^{sh} V_k e^{j\theta_k} \right]$$

$$S_{km}^* = jb_{km}^{sh} V_k^2 + y_{km} \left[V_k^2 - V_k V_m e^{-j(\theta_k - \theta_m)} \right]$$

Se asume que: $\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$

$$S_{km}^* = jb_{km}^{sh} V_k^2 + (g_{km} + jb_{km}) (V_k^2 - V_k V_m \cos\theta_{km} + j V_k V_m \sin\theta_{km})$$

$$S_{km}^* = [V_k^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos\theta_{km} - V_k V_m b_{km} \sin\theta_{km}] - j \left[-(b_{km} + b_{km}^{sh}) V_k^2 + V_k V_m b_{km} \cos\theta_{km} - V_k V_m g_{km} \sin\theta_{km} \right]$$

El flujo de potencia activa y reactiva estan dados así:

$$P_{km} = V_k^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos\theta_{km} - V_k V_m b_{km} \sin\theta_{km}$$

$$Q_{km} = - (b_{km} + b_{km}^{sh}) V_k^2 + V_k V_m b_{km} \cos\theta_{km} - V_k V_m g_{km} \sin\theta_{km}$$

El cálculo del flujo de potencia activa (P_{mk}) y reactiva (Q_{mk}) de la barra m hacia la barra k es el siguiente:

$$S_{mk}^* = P_{mk} - jQ_{mk} = E_m^* i_{mk}$$

$$S_{mk}^* = V_m e^{-j\theta_m} \left[y_{km}(V_m e^{j\theta_m} - V_k e^{j\theta_k}) + jb_{km}^{sh} V_m e^{j\theta_m} \right]$$

$$S_{mk}^* = jb_{km}^{sh} V_m^2 + y_{km} \left[V_m^2 - V_k V_m e^{j(\theta_k - \theta_m)} \right]$$

$$S_{mk}^* = jb_{km}^{sh} V_m^2 + (g_{km} + jb_{km}) (V_m^2 - V_k V_m \cos\theta_{km} - j V_k V_m \sin\theta_{km})$$

$$S_{mk}^* = [V_m^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos \theta_{km} + V_k V_m b_{km} \sin \theta_{km}] \\ -j \left[-(b_{km} + b_{km}^{sh}) V_m^2 + V_k V_m b_{km} \cos \theta_{km} + V_k V_m g_{km} \sin \theta_{km} \right]$$

El flujo de potencia activa y reactiva son:

$$P_{mk} = V_m^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos \theta_{km} + V_k V_m b_{km} \sin \theta_{km} \\ Q_{mk} = - (b_{km} + b_{km}^{sh}) V_m^2 + V_k V_m b_{km} \cos \theta_{km} + V_k V_m g_{km} \sin \theta_{km}$$

Pérdidas de potencia reactiva:

$$Q_e = Q_{km} + Q_{mk}$$

Al reemplazar las ecuaciones correspondientes se obtiene:

$$Q_e = -b_{km}^{sh} (V_k^2 + V_m^2) - b_{km} (V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos \theta_{km}) \\ Q_e = -b_{km}^{sh} (V_k^2 + V_m^2) - b_{km} |E_k - E_m|^2$$

Nota:

$ \Delta E = E_k - E_m $	Magnitud de la tensión en y_{km}
$-b_{km} E_k - E_m ^2$	Pérdida de potencia reactiva en y_{km}
$-b_{km}^{sh} (V_k^2 + V_m^2)$	Generación de potencia reactiva en el elemento shunt
(Pérdidas negativas, ya que b_{km}^{sh} mayor que 0)	

2.2.2 Curva de carga del generador síncrono

Es un diagrama denominado capacidad de carga o carta de operación de la máquina. En este diagrama se muestran las condiciones de operación normal de los generadores de rotor cilíndrico conectados a un barraje infinito. Esta carta de operación es muy importante para efectos de una apropiada operación de la máquina generadora.

La carta se construye bajo el supuesto de que el generador tiene un voltaje en terminales V_t fijo y que la resistencia de armadura es despreciable. La construcción de la curva se inicia con el diagrama fasorial de la máquina, en este se tiene a V_t como el fasor de referencia.

La capacidad del generador inyectada en el barraje, asumiendo la corriente de armadura en su valor limite, es definida como:

$$P^2 + Q^2 = S^2$$

En la figura 2.4B se observa la curva de potencia aparente de la máquina generadora, en esta el centro se localiza en o y tiene un radio de longitud o-m.

Quien limita la operación del devanado de armadura es la corriente de armadura máxima. Pero como el voltaje puede ser menor o mayor que el nominal, la S_{limite} puede ser mayor o menor que la $S_{nominal}$ de acuerdo con: $S_{limite} = \sqrt{3}V_{tLL} \times I_{Lmax}$

Donde: I_{Lmax} corriente máxima de armadura y V_{tLL} voltaje en terminales linea - linea.

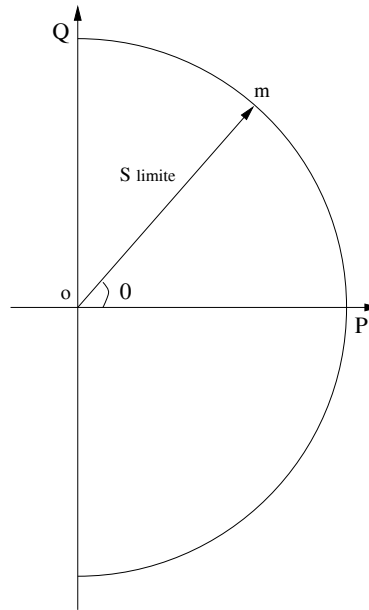


Figura 2.4B: Limite de la potencia aparente

La salida de potencia activa de la máquina está dada por $P = \sqrt{3}V_{tLL} \times I_{Lmax} \cdot \cos\theta$. Esta salida esta dada en Megawatts y siempre es positiva, sin importar el factor de potencia de la máquina.

La salida de potencia reactiva de la máquina está dada por $Q = \sqrt{3}V_{tLL} \times I_{Lmax} \cdot \sin\theta$. Esta salida esta dada en Megavares y puede ser positiva o negativa.

La capacidad limite del generador considerando el limite operativo de la corriente del devanado de campo (excitación) I_f es calculada con base en el circuito mostrado en la figura 2.4C. El efecto de la corriente de campo se refleja en el voltaje generado E_g , por tanto, incluir E_g en las ecuaciones es equivalente a incluir la corriente I_f del devanado de campo.

$$S = V_t \angle \theta \times I^* = V_t \left(\frac{E_g \angle \delta - V_t}{jX_s} \right)^*$$

$$S = (V_t \cdot E_g \angle -\delta - V_t^2) \cdot \left(\frac{j}{X_s} \right)$$

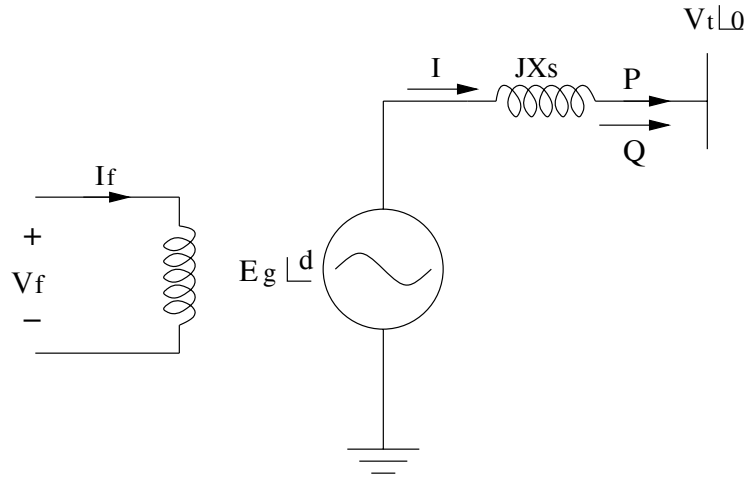


Figura 2.4C: Circuito equivalente del generador Síncrono

$$P = - \left(\frac{V_t \cdot E_g}{X_s} \right) \cdot \text{Sen}(-\delta) = \left(\frac{V_t \cdot E_g}{X_s} \right) \cdot \text{Sen}(\delta)$$

$$Q = \left(\frac{V_t \cdot E_g}{X_s} \right) \cdot \text{Cos}(\delta) - \left(\frac{V_t^2}{X_s} \right)$$

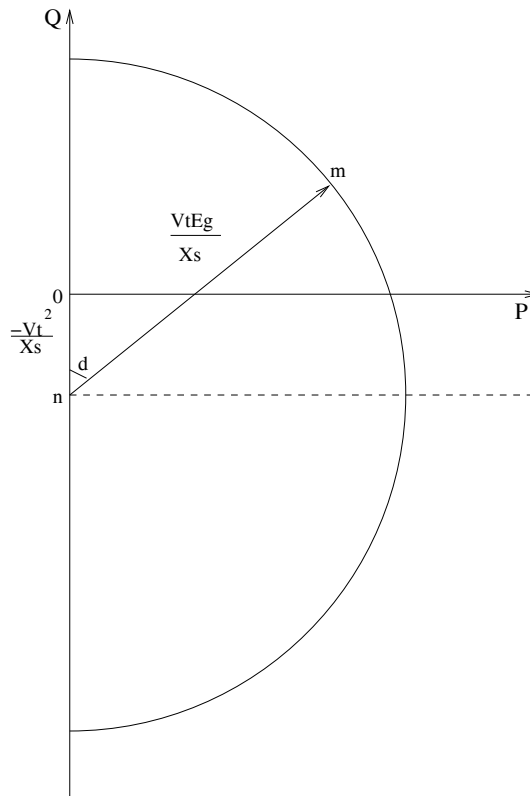


Figura 2.4D: Capacidad del generador con corriente de campo constante

$$\left. \begin{aligned} P &= \left(\frac{V_t \cdot E_g}{X_s} \right) \cdot \text{Sen}(\delta) \\ Q + \left(\frac{V_t^2}{X_s} \right) &= \left(\frac{V_t \cdot E_g}{X_s} \right) \cdot \text{Cos}(\delta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{V_t \cdot E_g}{X_s} \right)^2 = P^2 + \left(Q + \frac{V_t^2}{X_s} \right)^2$$

$$P^2 + \left(Q + \frac{V_t^2}{X_s} \right)^2 = \left(\frac{V_t \cdot E_g}{X_s} \right)^2$$

Se concluye que la nueva curva presentada en la figura 2.4D tiene el punto n como centro y un radio de longitud n-m.

Para el limite de estabilidad se asume el siguiente criterio:

$$\text{Sen } \delta_{max} \leq 0.9 \Rightarrow \delta = 65^\circ$$

Considerando las diferentes restricciones operativas del conjunto turbina-generator, se obtiene la Curva de carga del generador síncrono así:

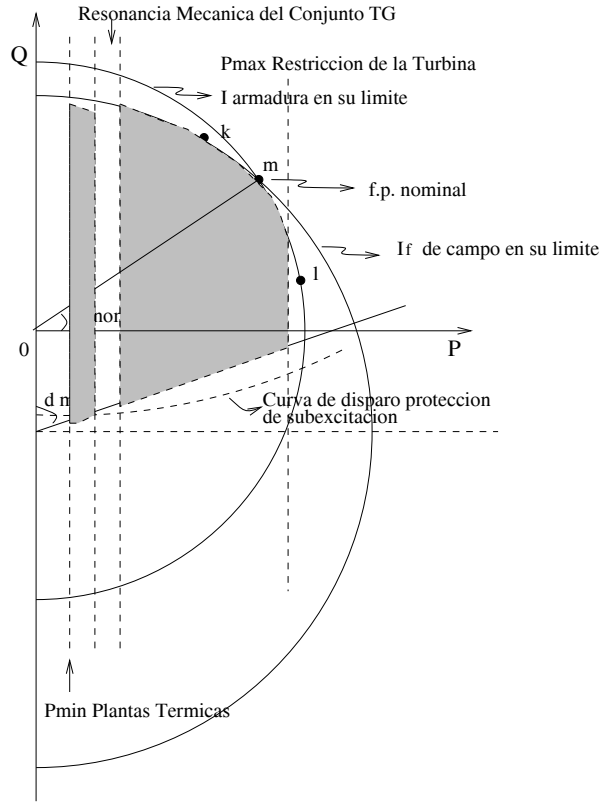


Figura 2.4E: Curva de carga del generador síncrono

De la figura 2.4E se observa que en el punto k se utiliza al máximo el devanado de campo y se subutiliza el de armadura. En el punto l se utiliza al máximo el devanado armadura y se subutiliza el de campo.

Por lo anterior se desea buscar el punto m, donde los dos devanados se aprovechan al máximo, este punto define el factor de potencia nominal de la máquina.

2.3 Sistema por unidad



Figura 2.5: Red eléctrica

Analizar un sistema en sus valores físicos reales (Ohmios, amperios, voltios, vatios) presenta dificultades debido al manejo de las diferentes unidades y el cálculo simultáneo en un sistema donde se tienen diferentes niveles de voltaje.

Al escalar o normalizar dichos valores, se pasa a trabajar en valor p.u., en el que la red es estudiada como si todos sus nodos estuvieran energizados al mismo nivel de tensión; entonces los transformadores son analizados por su impedancia de corto circuito, sin llevar en cuenta la relación de transformación.

Los valores p.u. son definidos mediante la siguiente relación:

$$\text{Valor en p.u.} = \frac{\text{Cantidades físicas}}{\text{Valor base de la cantidad}}$$

Donde las cantidades físicas se refieren a las cantidades dadas en: voltios, ohmios, amperios, vatios.

Ya que tanto las cantidades físicas como las cantidades base tienen las mismas dimensiones, el resultado de la división es un valor adimensional y por consiguiente se expresa como p.u.

Si el valor que ha sido expresado en p.u. se desea expresar en porcentaje, se multiplica por 100 de la siguiente manera:

$$\text{Valor en porcentaje} = \frac{\text{Cantidad física}}{\text{Valor base}} * 100.$$

Ventajas al realizar cálculos en valores p.u.

- Se simplifica el análisis de redes, todas las impedancias son dadas en una representación circuital sin considerar diferentes voltajes en el sistema.
- Se eliminan multiplicaciones y divisiones (operaciones) por $\sqrt{3}$, cuando los sistemas trifásicos balanceados son representados por un sistema por fase, por consiguiente, los factores $\sqrt{3}$ y 3 asociados con cantidades Δ y Y en sistemas trifásicos balanceados son tenidos en cuenta directamente en las cantidades base.

- Usualmente las impedancias de los aparatos eléctricos se dan en porcentaje o p.u. con base en las características del mismo.
- Diferentes características de muchos aparatos eléctricos pueden ser estimados por comparación de otros expresados en p.u.
- El uso de valores p.u. es más conveniente cuando se involucra el computador digital.
- Se eliminan las unidades en las operaciones matemáticas.

2.3.1 Sistema Monofásico

Las cantidades base son cuatro (voltaje, corriente, impedancia, potencia), de estas, dos deberán ser definidas, las otras dos quedan automáticamente determinadas a través de las ecuaciones:

$$V = I * Z \quad \text{y} \quad S = V * I$$

El valor especificado a las variables definidas es arbitrario, sin embargo en la práctica los valores son seleccionados dentro de rangos. Generalmente los valores base seleccionados son: V_B y S_B .

Así: se selecciona como voltaje base aquel cuya división proporcione un valor de o cercano a 1 p.u. y como potencia base un número redondo como, 1,10,100 ó 1000 MVA, dependiendo del subsistema analizado.

Las variables base son definidas así:

$$\begin{aligned} I_B &= \text{Amperios base} \\ V_B &= \text{Voltios base} \\ S_B &= \text{Voltiamperios base} \\ Z_B &= \text{Impedancia base} \end{aligned}$$

Las ecuaciones que relacionan las variables anteriores son:

Definición de Potencia base:

$$S_B = VA_B = P_B = Q_B = V_B I_B$$

De lo anterior se desprende que la potencia base puede ser expresada en Voltiamperios, Vatios o Vares.

Definición de Impedancia base:

$$Z_B = \frac{V_B}{I_B} \Omega \quad \text{se conoce que: } Z_B = X_B = R_B$$

Si se reemplaza la corriente base:

$$I_B = \frac{S_B}{V_B} = \frac{VA_B}{V_B} \text{ (Amperios)}$$

De la formulación anterior se deduce la fórmula de la impedancia base, expresada en función del voltaje y la potencia base.

$$Z_B = \frac{V_B^2}{VA_B} \Omega$$

De igual forma se deduce la admitancia base:

$$Y_B = \frac{I_B}{V_B} \mathfrak{U} \quad \text{se conoce que: } Y_B = B_B = G_B$$

Si el voltaje es expresado en KV y la potencia en MVA se emplea la siguiente relación:

$$Z_B = \frac{(KV_B)^2}{MVA_B} \Omega$$

El valor p.u. se obtiene dividiendo la cantidad física por la cantidad base, siendo que las dos tienen la misma dimensión.

Cálculo de la impedancia p.u.:

$$Z_{p.u.} = \frac{Z_{\text{físico}}}{Z_B} \text{ p.u.} = Z_{\text{físico}} \frac{MVA_B}{(KV_B)^2} \text{ p.u.}$$

De forma similar se calcula la potencia, corriente y voltaje en valores p.u.

$$S_{p.u.} = \frac{S_{\text{físico}}}{S_B} \text{ p.u.}$$

$$I_{p.u.} = \frac{I_{\text{físico}}}{I_B} \text{ p.u.}$$

$$V_{p.u.} = \frac{V_{\text{físico}}}{V_B} \text{ p.u.}$$

Las cantidades base son números reales, mientras que las cantidades físicas pueden ser números complejos, para ilustrar lo anterior se presenta la siguiente relación:

$$Z_{p.u.} \angle \theta = \frac{Z \angle \theta}{Z_B} \text{ p.u.}$$

Si Z es representada en forma rectangular se tendrá:

$$Z_{p.u.} = R_{p.u.} + jX_{p.u.}$$

Similarmente la potencia activa y reactiva expresada en p.u. es como sigue:

$$S_{p.u.} = P_{p.u.} + jQ_{p.u.}$$

Siendo la potencia activa y reactiva en p.u. definidas como sigue:

$$P_{p.u.} = \frac{P_{\text{físico}}}{S_{Base}} \text{ y } Q_{p.u.} = \frac{Q_{\text{físico}}}{S_{Base}}$$

La potencia que es calculada como el producto del voltaje por la corriente es expresada así:

$$S \angle \phi = V \angle \theta_v * I \angle -\theta_i \text{ (VA)}$$

Al dividir la ecuación anterior por el valor base se obtiene:

$$\frac{S \angle \phi}{S_B} = \frac{V \angle \theta_v * I \angle -\theta_i}{S_B} \text{ p.u.} \Rightarrow S_{p.u.} \angle \phi = V_{p.u.} \angle \theta_v * I_{p.u.} \angle -\theta_i \Rightarrow S_{p.u.} = V_{p.u.} I_{p.u.}^*$$

2.3.2 Conversión de valores p.u. a valores físicos

Dados los valores p.u. los valores físicos son calculados como sigue:

$$\begin{aligned} I &= I_{p.u.} * I_B & (\text{Amp.}) \\ V &= V_{p.u.} * V_B & (\text{Volt.}) \\ Z &= Z_{p.u.} * Z_B & (\Omega) \\ R &= R_{p.u.} * Z_B & (\Omega) \\ \text{VA} &= \text{VA}_{p.u.} * \text{VA}_B & (\text{VA}) \\ P &= P_{p.u.} * \text{VA}_B & (W) \end{aligned}$$

2.3.3 Cambio de base

Generalmente las impedancias p.u. de los aparatos son dadas con base en voltiamperios y voltaje de diseño de este. Si este aparato formara parte de un sistema que tiene otras bases, es necesario referir el valor p.u. de dicho aparato a las bases del sistema.

Se tiene entonces la siguiente relación:

$$Z_{p.u. \text{ dado}} = Z_{\text{física}} \frac{MVA_{B \text{ dado}}}{(KV_{B \text{ dado}})^2}$$

$$Z_{\text{física}} = Z_{p.u. \text{ dado}} \frac{(KV_{B \text{ dado}})^2}{(MVA_{B \text{ dado}})}$$

Nota: La palabra **dado** se refiere a la información del aparato que forma parte del sistema y la palabra **nueva** a la del sistema.

Para referirlo a los valores base del sistema se tiene:

$$Z_{p.u. \text{ nueva}} = Z_{\text{física}} \frac{MVA_{B \text{ nueva}}}{(KV_{B \text{ nueva}})^2}$$

Si se reemplazan las dos fórmulas anteriores se tendrá:

$$Z_{p.u. \text{ nueva}} = Z_{p.u. \text{ dado}} \left[\frac{MVA_{B \text{ nueva}}}{MVA_{B \text{ dado}}} \right] \left[\frac{KV_{B \text{ dado}}}{KV_{B \text{ nueva}}} \right]^2 p.u.$$

Comparando los valores de voltajes y potencias del sistema y del aparato, pueden presentarse varias situaciones:

- Voltajes bases sean los mismos, potencias bases diferentes
- Voltajes bases diferentes, potencias bases las mismas
- Voltajes y potencias bases sean las mismas.

2.3.4 Proceso seguido en un sistema en el cual existen transformadores monofásicos

- Voltaje base.

De este se conoce tanto su valor como su localización en el sistema. Con este y la relación de transformación de los transformadores se determinan los voltajes base en otros puntos del sistema.

- Relación de transformación del voltaje y de la corriente.

$$\text{Relación de transformación del voltaje: } \frac{V_P}{V_S} = \frac{n_P}{n_S} = a \Rightarrow V_S = \frac{1}{a} V_P$$

$$\text{Relación de transformación de la Corriente: } \frac{I_P}{I_S} = \frac{n_S}{n_P} = \frac{1}{a} \Rightarrow I_S = a I_P$$

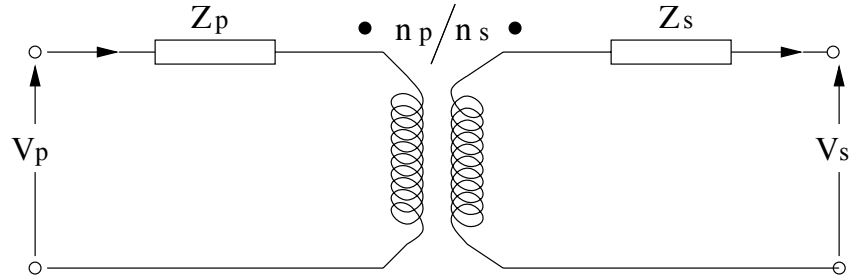


Figura 2.6: Representación del transformador

- Formas de referir la impedancia de un transformador de un lado al otro (Del primario al secundario o viceversa)

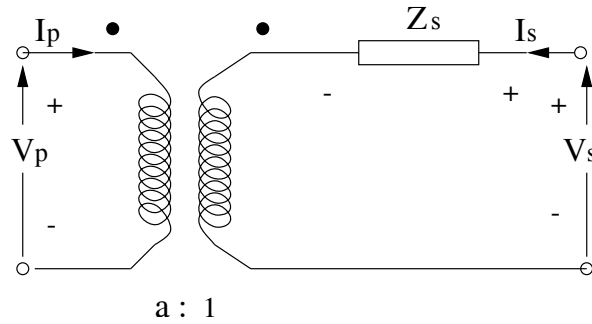


Figura 2.7: Impedancia del transformador referida al secundario

En este modelo la impedancia del transformador es referida al secundario. Para efectos del cálculo, la corriente de magnetización es ignorada (g_m e b_m se desprecian).

La caída de tensión en la impedancia Z_S es dada por: $\frac{V_P}{a} - V_S + Z_S I_S = 0$

Considerando que: $I_S = a I_P \Rightarrow \frac{V_P}{a} - V_S = -Z_S a I_P$

Que al ser reescrita queda: $V_P - a V_S = -a^2 Z_S I_P \Rightarrow V_P - a V_S + a^2 Z_S I_P = 0$

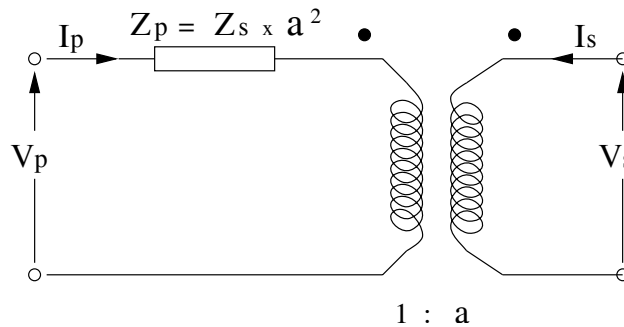


Figura 2.8: Impedancia del transformador en el primario

Esta expresión corresponde a la caída de tensión en una impedancia equivalente referida al primario. Al compararlo en términos de la impedancia del primario, se obtiene: $Z_P = a^2 Z_S$

La base de tensión del otro lado del transformador será entonces una variable dependiente determinada a partir de la base del primario y de la relación de transformación nominal.

Así tenemos bases independientes o arbitrarias.

- Base de Potencia aparente: S_B (MVA)
- Base de tensión del primario : V_{PB} (KV)
- Base de relación de transformación: (adimensional)
- Base de tensión del secundario: $V_{SB} = V_{PB}/a_B$ (KV)
- Base de corriente del primario: $I_{PB} = S_B/V_{PB}$ (Amp)
- Base de corriente del secundario: $I_{SB} = S_B/V_{SB}$ (Amp)
- Base de impedancia en el primario: $(V_{PB})^2/S_B$ (Ω)
- Base de impedancia en el secundario: $(V_{SB})^2/S_B$ (Ω)

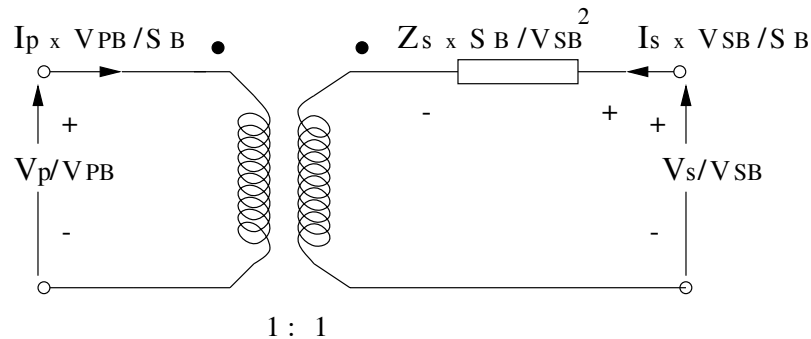


Figura 2.9: Modelo del transformador en p.u. vista en el secundario

Note que se está considerando el caso particular en que el tap del transformador está en la posición nominal o sea $a = a_B$

Cuando el tap del transformador se encuentra en su valor nominal $a = a_{Base}$

Las impedancias referidas al primario y al secundario del transformador son iguales cuando son medidas en p.u.

$$Z_{Pp.u.} = Z_{Sp.u.} \Rightarrow \frac{Z_P P_{Base}}{(V_{PBase})^2} = \frac{Z_S P_{Base}}{(V_{SBase})^2} \Rightarrow \frac{Z_P}{(V_{PBase})^2} = \frac{Z_S}{(V_{SBase})^2}$$

Lo anterior puede ser verificado con la siguiente relación:

$$Z_p = a_{Base}^2 Z_S = Z_S \left(\frac{V_{PBase}}{V_{SBase}} \right)^2$$

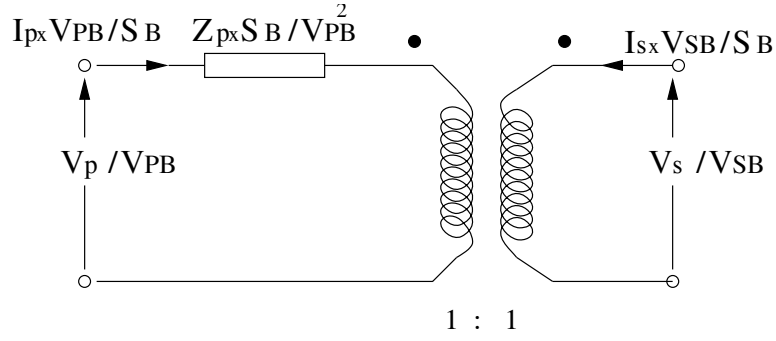


Figura 2.10: Modelo del transformador en p.u. vista en el primario

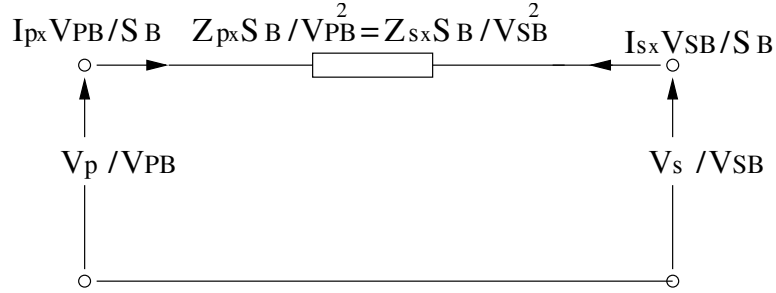


Figura 2.11: Modelo del transformador en p.u. con el tap en la posición nominal

Demostrar que: $X_S \text{ p.u.} = X_P \text{ p.u.}$

Se tiene que:

X_1 = reactancia del primario y X_2 = reactancia del secundario

$$X_P = X_1 + a^2 X_2$$

$$X_P \text{ p.u.} = \frac{X_1 + a^2 X_2}{Z_{P_{Base}}} = \frac{X_1 + a^2 X_2}{(V_{P_{Base}})^2} \text{ MVA}_{Base}$$

$$X_S = X_2 + \frac{X_1}{a^2} = \frac{a^2 X_2 + X_1}{a^2}$$

$$X_S \text{ p.u.} = \frac{a^2 X_2 + X_1}{a^2 Z_{S_{Base}}} = \frac{a^2 X_2 + X_1}{(V_{P_{Base}}/V_{S_{Base}})^2 (V_{S_{Base}})^2} \text{ MVA}_{Base}$$

$$X_S \text{ p.u.} = \frac{X_1 + a^2 X_2}{(V_{P_{Base}})^2} \text{ MVA}_{Base}$$

Ejercicio Pasar a valores p.u. el siguiente sistema de energía eléctrica.

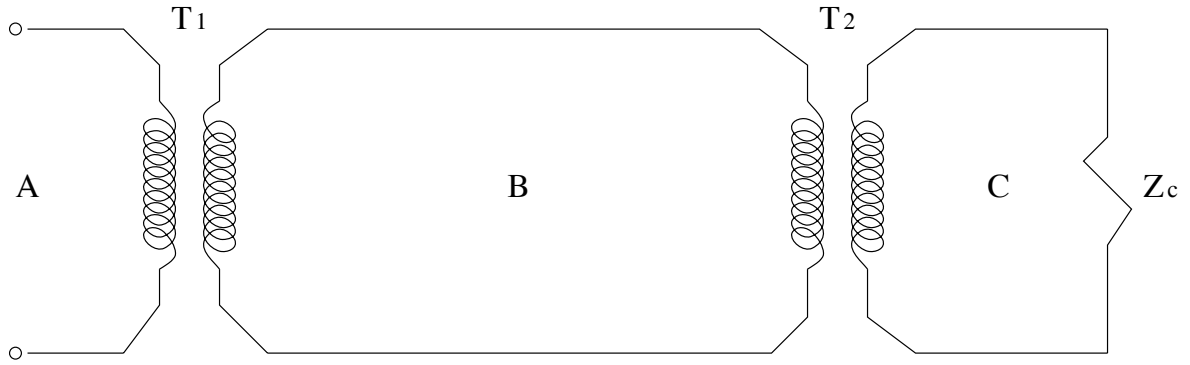


Figura 2.12: Ejercicio de valores p.u.

Datos del sistema:

T_1 : Rel. de transf. = 13.8/115 KV, Capacidad = 10 MVA Reactancia $X_1 = 0.1$ p.u.

T_2 : Rel. de transf. = 115/34.5 KV, Capacidad = 10 MVA Reactancia $X_2 = 0.08$ p.u.

$Z_c = 300 \Omega$

Se selecciona $V_{Base} = 13.8$ KV en A y $MVA_{Base} = 10$ MVA

Modelo p.u. para el transformador con tap fuera de su valor nominal.

Para el modelo anterior se asumió que $a = a_{Base} = \frac{V_{PBase}}{V_{SBase}}$, donde a es el valor del tap y a_{Base} es el tap nominal dado por la relación entre las tensiones nominales del primario y secundario.

Casos en los cuales $\frac{a}{a_{Base}}$ no es necesariamente unitario.

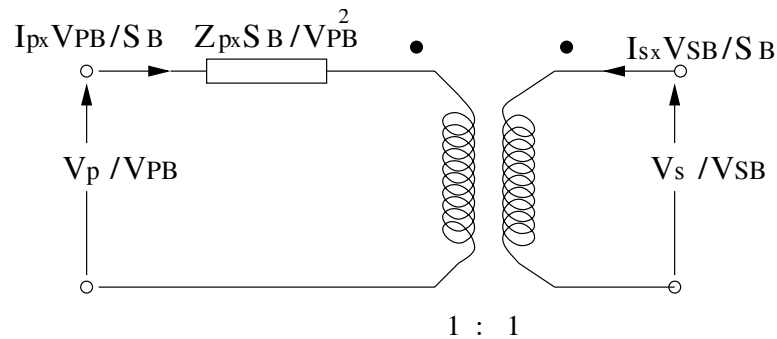


Figura 2.13: Modelo del transformador en p.u. vista en el primario

Relación entre las impedancias del primario y secundario:

$$Z_{P(a)} = a^2 Z_{S(a)} = Z_{S(a)} \left(\frac{a V_{PBase}}{a_{Base} V_{SBase}} \right)^2$$

Ejercicio: Dado el siguiente sistema compuesto por un generador y una línea, se pide que sea expresado en p.u. Nota: Los parámetros de los elementos de dicho sistema fueron calculados con base en sus valores nominales.

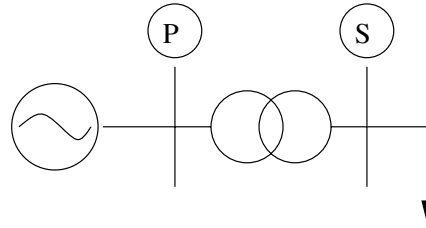


Figura 2.14: Sistema eléctrico básico

	Generador	Transformador
Capacidad (MVA)	75	40
Voltaje (kv)	20	20/34.5
Reactancia (p.u.)	0.09	0.20

- Selección de nuevos valores base

$V_{B_p} = 20 \text{ KV}$ (En el primario del transformador)

$V_{B_s} = \frac{1}{a} V_{B_p} = \frac{34.5}{20} 20 \text{ KV} = 34.5 \text{ KV}$ (En el secundario del transformador)

$S_B = 100 \text{ MVA}$

- Transformar las impedancias de los elementos a valores en Ω .

– Transformación de p.u. dado a Ω

Generador: $Z (\Omega) = 0.09 \frac{(20)^2}{75} = 0.48 \Omega$

Transformador $Z (\Omega) = 0.20 \frac{(20)^2}{40} = 2.0 \Omega$ (En el primario del transformador)

$Z(\Omega) = 0.2 \frac{(34.5)^2}{40} = 5.95 \Omega$ (En el secundario del transformador)

- Mostramos que la impedancia en p.u. vista en el primario o secundario son iguales:

$$Z_{P.p.u.} = Z_{S.p.u.}$$

$$Z_P \frac{S_B}{(V_{PB})^2} = 2.0 \frac{100}{(20)^2} = 0.5 \text{ p.u.}$$

$$Z_S \frac{S_B}{(V_{SB})^2} = 5.95 \frac{100}{(34.5)^2} = 0.5 \text{ p.u.}$$

Nota: Como se observa, las impedancias en p.u. vistas desde el primario y secundario del transformador son iguales. A pesar de esto, es importante recordar que los valores base con los cuales se calcularon dichas impedancias son diferentes, ya que se cuenta con valores base en el primario y secundario por tal razón los valores reales de las impedancias en Ω vistas desde cada lado son diferentes.

Valor de la Impedancia en p.u. del Generador:

$$Z_G \frac{S_B}{(V_{PB})^2} = 0.48 \frac{100}{(20)^2} = 0.12 \text{ p.u.}$$

Circuito equivalente expresado en valores p.u.

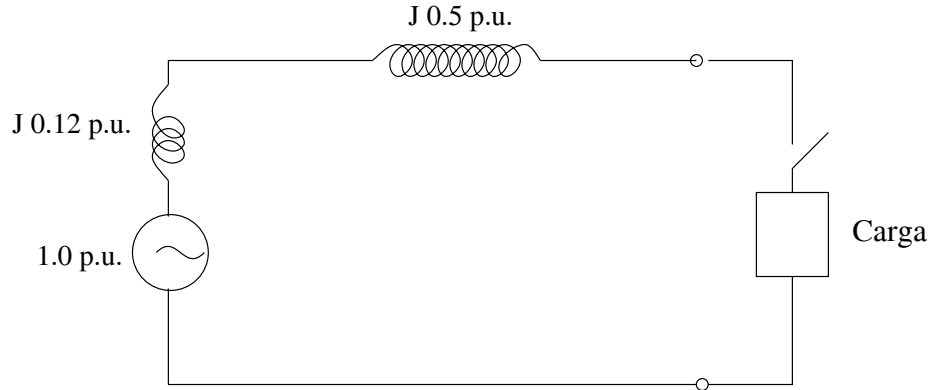


Figura 2.15: Modelo en impedancias del generador

Ejercicio para trabajo de casa:

Dado el siguiente sistema de energía eléctrica se pide determinar:

- Los valores base del sistema (Voltajes, Impedancias y Potencia)
- Valores en p.u. de los parámetros del sistema con base en las nuevas base.

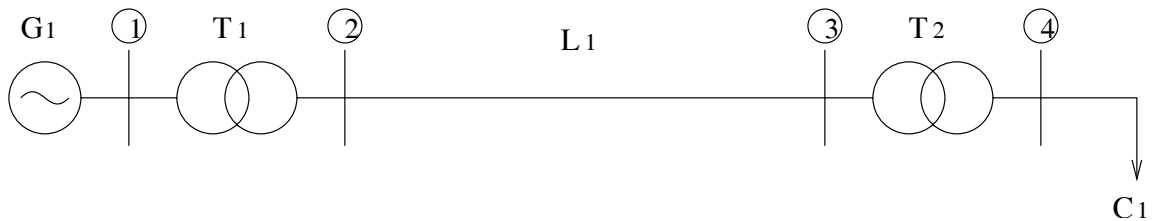


Figura 2.16: Sistema eléctrico

Información del sistema:

$$G_1 = 15 \text{ MVA}, 13.2 \text{ KV}, X = 0.15 \text{ p.u.}$$

$$T_1 = 20 \text{ MVA}, 13.8/115 \text{ KV}, X = 0.1 \text{ p.u.}$$

$$T_2 = 20 \text{ MVA}, 115/13.8 \text{ KV}, X = 0.08 \text{ p.u.}$$

$$L_1 = 20 + j100 \Omega$$

$$C = 300 \Omega$$

Valores base: $V_B = 120 \text{ KV}$ (En el nodo 2)

$$S_B = 100 \text{ MVA}$$

2.3.5 Sistemas Trifásicos

Generalmente los sistemas trifásicos son diseñados y operados de manera balanceada, por lo que pueden ser resueltos como sistemas monofásicos (por fase).

Para llevar a cabo su análisis, las redes trifásicas son descompuestas en tres redes independientes denominadas de secuencia positiva, negativa y cero.

En operación balanceada sólo la red de secuencia positiva tiene fuente de excitación, por tanto la red de secuencia negativa y cero no presentan fuentes de excitación, siendo su efecto nulo.

Así, los sistemas trifásicos balanceados son analizados con una representación monofásica (red de secuencia positiva).

El sistema trifásico balanceado es entonces representado por un sistema monofásico y los valores obtenidos de la fase referencia son extendidos a las otras dos fases.

$$V_{B(L-n)} = \frac{V_{B(L-L)}}{\sqrt{3}} \text{ (Voltios)}$$

$$S_{B(1\varphi)} = \frac{S_B(3\varphi)}{3} \text{ (Voltiamperios)}$$

En un sistema trifásico se emplean como valores base el voltaje línea - línea y como potencia base la potencia trifásica, tal como se describe a continuación:

- Valores base: $S_B(3\varphi)$, $V_{B(L-L)}$
- Cálculo de la corriente base

$$I_B = \frac{S_B(3\varphi)}{\sqrt{3} V_{B(L-L)}} \text{ (Amp.)}$$

Si el voltaje es expresado en KV y la potencia en MVA, la corriente es calculada en KAmperios.

$$I_B = \frac{\text{MVA}_B(3\phi)}{\sqrt{3} \text{KV}_{B(L-L)}} \text{ (K Amp.)}$$

La impedancia base es calculada así:

$$Z_B = \frac{[\text{KV}_{B(L-L)}]^2}{\text{MVA}_{B(3\varphi)}} \Omega = R_B = X_B$$

La admitancia es expresada como:

$$Y_B = \frac{1}{Z_B} = \frac{\text{MVA}_{B(3\phi)}}{[\text{KV}_{B(L-L)}]^2} \quad \mathfrak{U} = G_B = B_B$$

Los datos usuales de la impedancia serie de los sistemas de transmisión estan dados en Ohms/milla y la susceptancia shunt en siemens/milla a 60 HZ, el orden de la capacidad es de (10^{-12} F/m). Por lo tanto la impedancia y la susceptancia shunt en p.u. por milla de línea es expresada como se presenta a continuación:

$$Z_{p.u.} = Z (\Omega/\text{milla})/Z_{Base} \Rightarrow$$

$$Z_{p.u.} = Z(\Omega/\text{milla}) \frac{\text{MVA}_{B(3\phi)}}{[\text{KV}_{B(L-L)}]^2} = Z(p.u./\text{milla})$$

Siendo la impedancia Z: $Z = R + jX_L = Z \angle \theta \quad (\Omega/\text{milla})$

Si el voltaje base esta expresado en KV y la potencia base en MVA, la reactancia y susceptancia en p.u. son calculadas de la siguiente manera:

$$X_{p.u.} = X \frac{[\text{MVA}_{B(3\phi)}]}{(\text{KV}_{B(L-L)})^2} p.u.$$

$$B_{p.u.} = B \frac{(\text{KV}_{B(L-L)})^2}{[\text{MVA}_{B(3\phi)}]} p.u.$$

2.3.6 Cálculo del Z p.u. en el transformador $3\phi \Delta - Y$

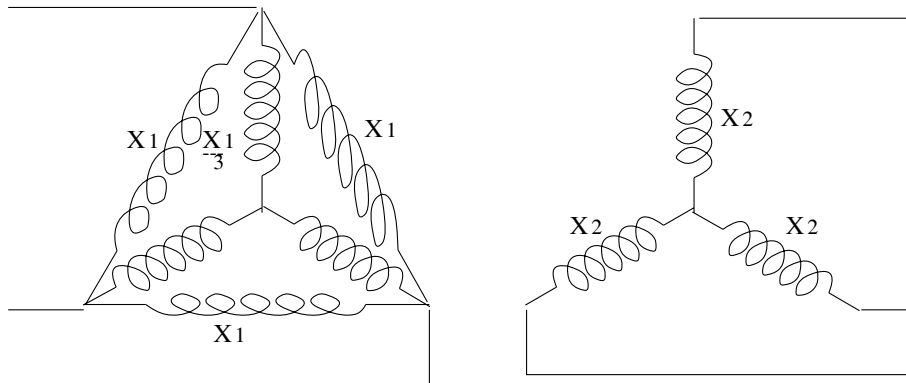


Figura 2.17: Z p.u. en el transformador 3ϕ

En el equivalente monofásico:

Conexión Y - Y

$$X_P \text{ p.u.} = \frac{X_1/3 + (V_1^2/3V_2^2)X_2}{V_1^2/3} \text{ MVA } (1\phi) = \frac{X_1 + a^2 X_2}{V_1^2} \text{ MVA } (1\phi)$$

Conexión Δ - Y

$$X_P \text{ p.u.} = \frac{X_1 + (V_1^2/V_2^2)X_2}{V_1^2} \text{ MVA } (1\phi) = \frac{X_1 + a^2 X_2}{V_1^2} \text{ MVA } (1\phi)$$

El valor en por unidad de la impedancia del transformador no cambia y es independiente de la conexión que se haga. Solo cambia si es necesario cambiar las bases. También se puede demostrar que el valor en p.u. es igual si se evalúa en el equivalente monofásico referido al lado de baja.

2.3.7 Modelos equivalentes de Transformadores trifásicos

- Consideremos el siguiente transformador con conexión YY

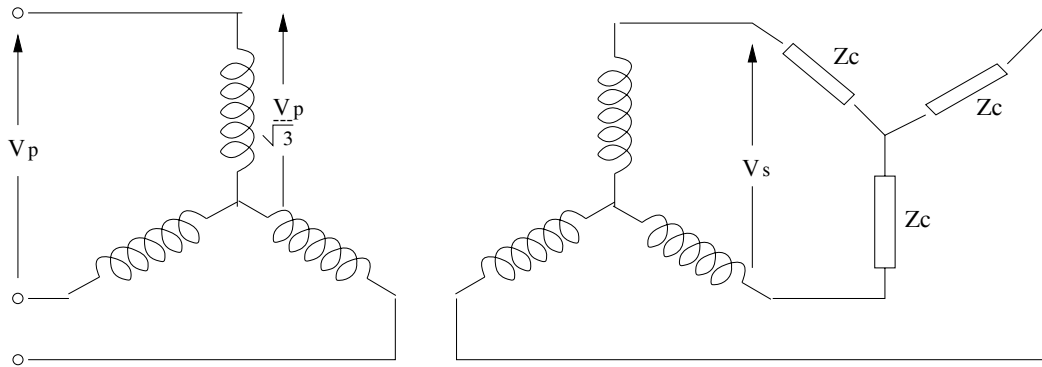


Figura 2.18: Modelo equivalente del transformador Y-Y

Sea: V_p^b y V_s^b los valores nominales de las tensiones de línea (fase-fase) en el primario y secundario.

La relación de transformación nominal es dada por:

$$a^b = \frac{V_p^b}{V_s^b} = \frac{V_p^b/\sqrt{3}}{V_s^b/\sqrt{3}}$$

Por lo tanto, es indiferente emplear tensiones de línea o tensiones de fase.

La impedancia de la carga reflejada al primario es dada por: $Z_c^P = (a^b)^2 Z_c$

- Consideremos un transformador trifásico con conexión Y Δ

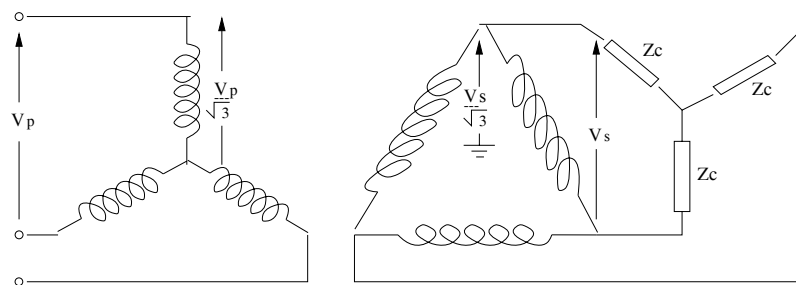


Figura 2.19: Modelo equivalente del transformador Y- Δ

Si imaginamos en relación de espiras tal que las tensiones de línea en el primario y en el secundario, este transformador es equivalente al de conexión YY

Para este caso, la relación del número de espiras entre primario y secundario es: $a = \frac{V_P^b/\sqrt{3}}{V_S^b}$

Para el mismo caso la relación de espiras equivalente es dada por $a^{eq} = \frac{V_P^b}{V_S^b}$

Lo anterior corresponde a la relación entre las tensiones de línea (fase-fase) nominales del primario y el secundario.

De esta forma trataremos los transformadores YY e Y Δ utilizando el mismo modelo, o sea, en el caso del transformador con conexión Y Δ en lugar de pensar en la relación de espiras que realmente existe, se trabajan con la relación equivalente conforme fué descrito arriba.

Nota: Al trabajar en valores por unidad, las cargas trifásicas se representan en Y, los transformadores no requieren de conversión.

2.3.8 Unidades p.u. para Sistemas de Transmisión

Una red de transmisión de energía eléctrica es formada por líneas de transmisión, transformadores, generadores, cargas, condensadores y inductores y otros equipamientos auxiliares.

Nota: En los sistemas de transmisión se podrán seleccionar los siguientes valores base

- $V_{Base} = V_{L-N}$ y $S_{Base} = S_{Base}(3\phi)/3$
- $V_{Base} = V_{L-L}$ y $S_{Base} = S_{Base}(3\phi)$

Esta última es la opción más usual. Lo anterior basado en que un sistema 3ϕ equilibrado se puede resolver como uno monofásico, puesto que no circula corriente por el neutro.

a) **Sistema Radial**

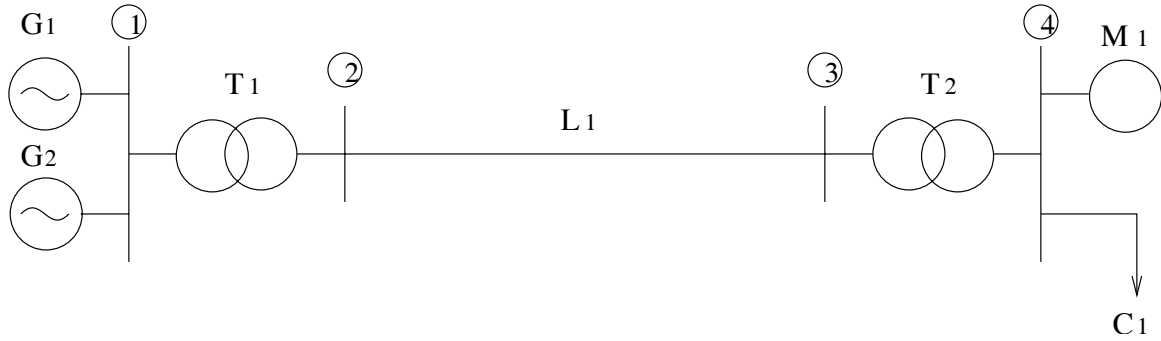


Figura 2.20: Red radial

Datos del Sistema:

Generador G_1 :	Reactancia transitoria: $X_{G1} = 10\% = 0.10 \text{ p.u.}$ Conexión: Y Potencia nominal: $P_{G1}^b = 50 \text{ MVA}$ Tensión nominal: $V_{G1}^b = 16 \text{ KV}$
Generador G_2 :	Reactancia transitoria: $X_{G2} = 10\% = 0.10 \text{ p.u.}$ Conexión: Y Potencia nominal: $P_{G2}^b = 50 \text{ MVA}$ Tensión nominal: $V_{G2}^b = 16 \text{ KV}$
Transformador T_1 :	Relación de transf.: $a_{T1}^b = 13.8 \text{ Y}/138 \Delta \text{ KV}$ Conexión Y - Δ Reactancia de dispersión : $X_{T1} = 8\% = 0.08 \text{ p.u.}$ Potencia nominal : $P_{T1}^b = 120 \text{ MVA}$
Transformador T_2 :	Relación de transf.: $a_{T2}^b = 138 \Delta/13.8 \text{ Y KV}$ Conexión: $\Delta - \text{Y}$ Reactancia de dispersión: $X_{T2} = 8\% = 0.08 \text{ p.u.}$ Potencia nominal: $P_{T2}^b = 100 \text{ MVA}$
Motor M_1 :	Reactancia transitoria: $X_{M1} = 10\% = 0.10 \text{ p.u.}$ Tensión nominal: $V_{M1}^b = 13.8 \text{ KV}$ Potencia nominal: $P_{M1}^b = 80 \text{ MVA}$
Carga C_1	Resistencia: $R_C = 2.0 \Omega$
Línea de Transmisión L_1 :	Potencia nominal: $P_{L1}^b = 100 \text{ MVA}$ Tensión nominal: $V_{L1}^b = 138 \text{ KV}$ Reactancia: $X_{L1} = 10\% = 0.1 \text{ p.u.}$

(Valores base del Sistema: $V_{L1}^b = 138 \text{ KV}$ y $P_{L1}^b = 100 \text{ MVA}$)

b) Sistemas enmallados

Las figuras 2.21, 2.22 y 2.23 muestran las diferentes variantes que se pueden presentar en la configuración de un sistema de Transmisión de Energía Eléctrica.

La configuración menos utilizada es la mostrada en la figura 2.22. La de más uso es la mostrada en la figura 2.23. Como ejemplo de este tipo de configuración se menciona el Sistema Eléctrico Colombiano.

Generalmente las redes de transmisión se configuran inicialmente en forma radial, y a medida que crecen la estructura es modificada hasta llegar a un sistema fuertemente enmallado, a fin de mejorar la confiabilidad y optimizar los recursos en el suministro de la energía eléctrica.

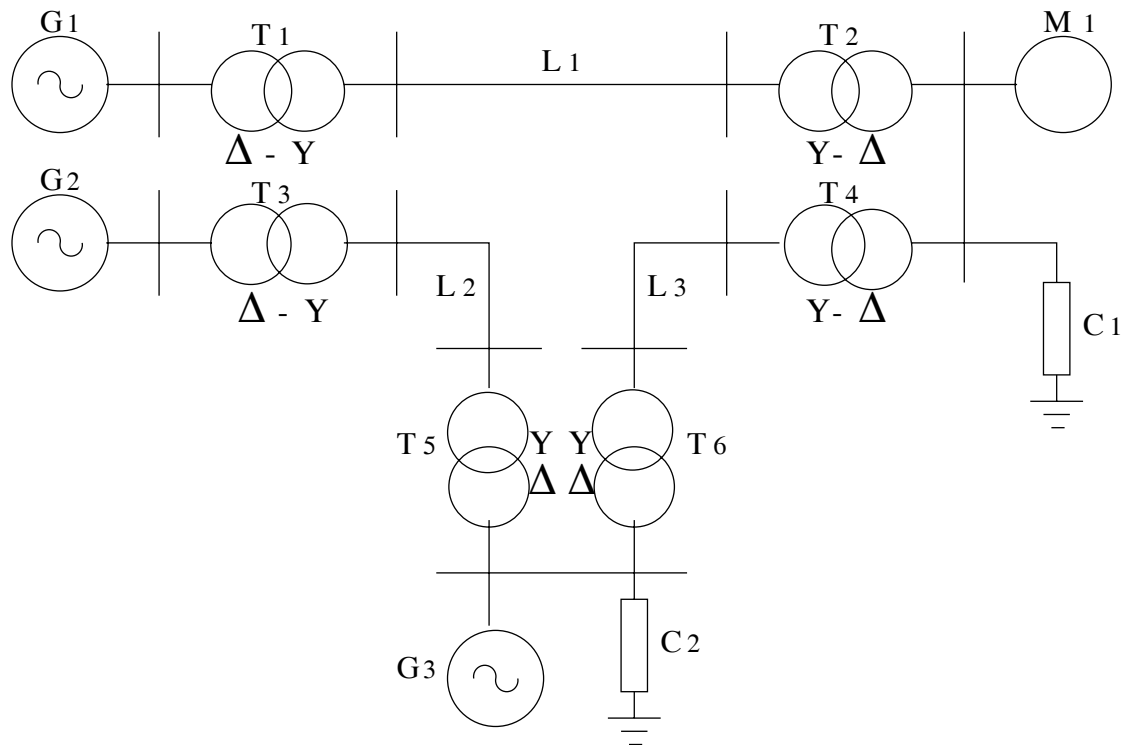


Figura 2.21: Sistema en malla abierta

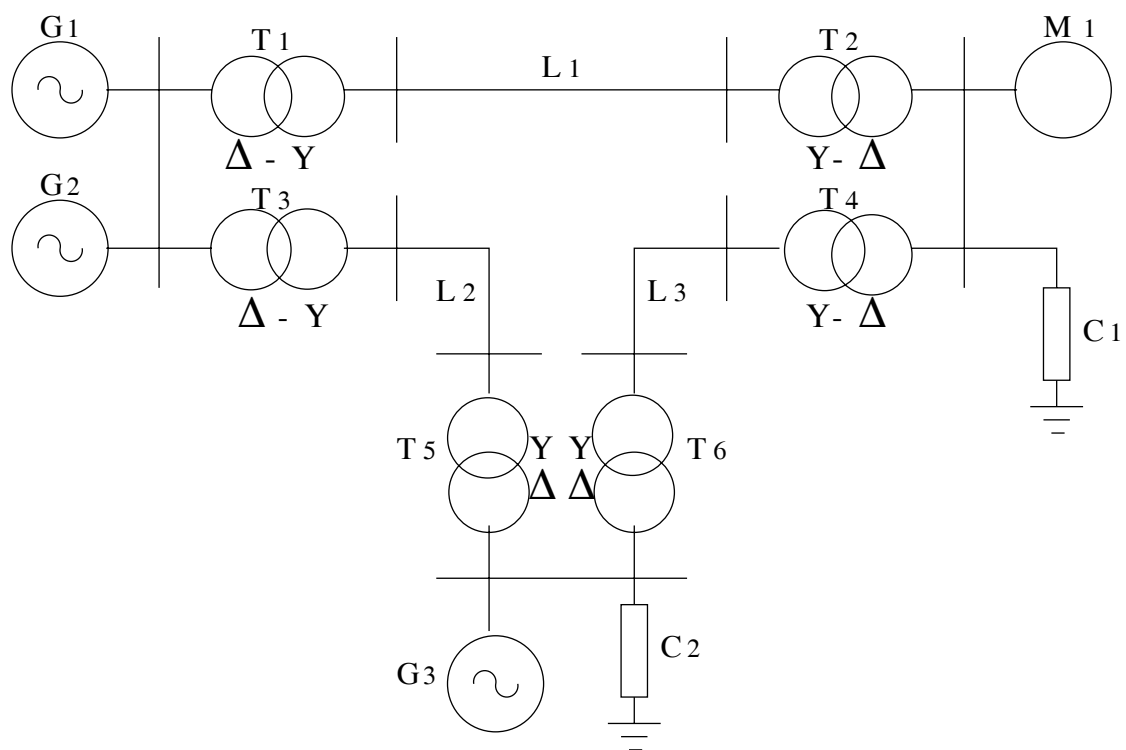


Figura 2.22: Sistema en malla cerrada con transformadores en la malla

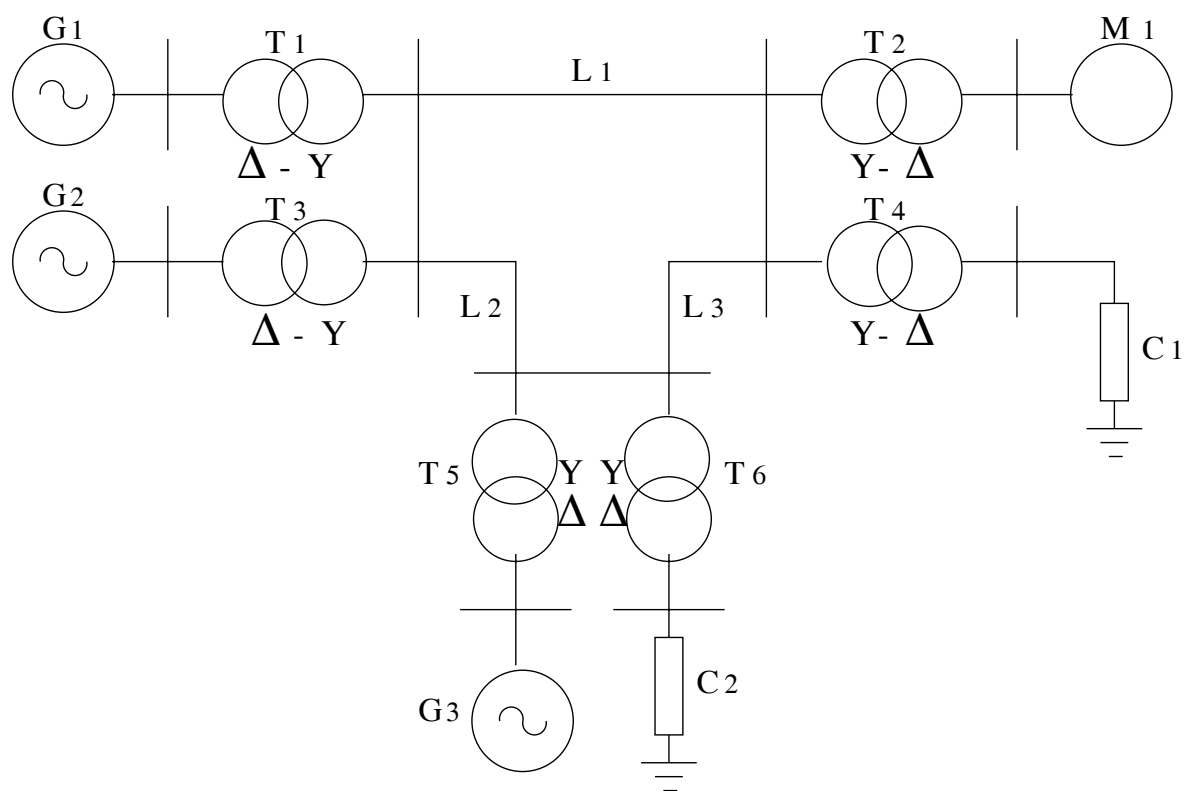


Figura 2.23: Sistema en malla cerrada sin transformadores en la malla

La figura 2.21 muestra un sistema radial, en cuyo cálculo de los parámetros p.u. siguen los mismos pasos del ejercicio anterior.

En el caso de la figura 2.23, a pesar de ser enmallada también puede ser tratada de la misma forma del ejercicio anterior.

La configuración que se observa en la figura 2.22 presenta una dificultad adicional, aquí la malla es cerrada a través de transformadores. Estos elementos dependiendo de la conexión y/o localización de los taps pueden introducir desfase angular y/o elevación (disminución) del nivel de tensión nodal. Por lo anterior, el cerramiento de mallas a través de transformadores podrá introducir complejidad adicional en el cálculo de los valores p.u.

c) Desfasajes introducidos por los transformadores

- Conexión Y-Y y $\Delta - \Delta$:

Dentro de la norma americana, las designaciones de los terminales de alta ($H_1 - H_2 - H_3$) y de baja ($X_1 - X_2 - X_3$) son tales en los transformadores Y-Y ó $\Delta - \Delta$, que las tensiones respecto al neutro de los terminales H_1, H_2 y H_3 están en fase con las tensiones respecto al neutro de los terminales X_1, X_2 y X_3 respectivamente. Esta norma equivale a una conexión Y- Y_o ó $\Delta - \Delta_o$. Existen otras conexiones manejando horas pares cuyo empleo es mínimo.

- Conexión Y - Δ :

En los transformadores con conexión Y - Δ existe un desfase que depende de la conexión. Según las normas americanas a nivel de transmisión se emplea la conexión $\Delta - Y_1$ que equivale a un desplazamiento de 30° entre los voltajes L-L ó L-N del primario y secundario. Esto significa que el transformador afecta tanto magnitudes como ángulos y por tanto el transformador Y - Δ trabaja como un desfaseador, además de su función esperada de alterar las magnitudes. Además de la anterior, existen otros tipos de conexión. A nivel de distribución el más utilizado es el $\Delta - Y_5$ en el el desfase es de 150°

En sistemas en malla cerrada con transformadores (ver figura 2.22) puede presentar un efecto importante en el modelaje de la red. En caso de presentarse esta situación se recorre la malla para calcular el desfase angular y la relación de transformación de la misma de la siguiente manera:

- La relación de transformación nominal de la malla, dada por el producto de las relaciones de transformación individual de los transformadores existentes en la malla.
- El desfase total de la malla, dada por la suma algebraica de los desfases individuales introducidos por los transformadores con conexión Y - Δ y $\Delta - Y$.
- Si después de calcular la relación de transformación y el desfase de la malla, se obtiene que:
 - La relación de transformación es 1 y el desfase de la malla cero, el sistema puede ser tratado como radial.

- La relación de transformación fuera diferente de uno y/o el desfase total diferente de cero, se tomará un cuidado especial, en el cual, un transformador con desfase complejo es introducido en la malla.

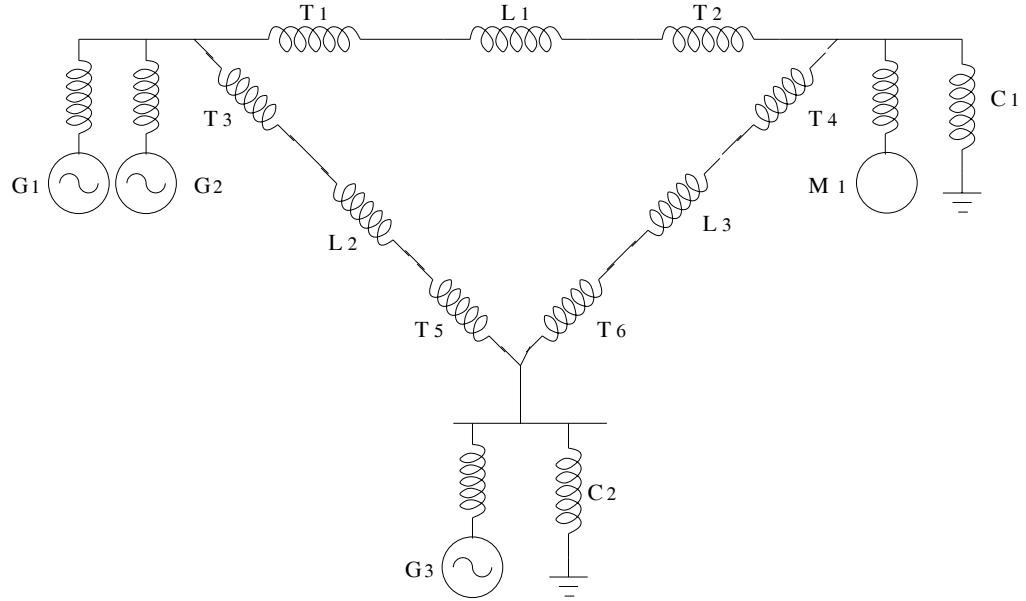


Figura 2.24: Circuito de malla cerrada

2.3.9 Transformador Monofásico con tres arrollamientos

La inclusión de un tercer arrollamiento puede ser útil en situaciones prácticas, como por ejemplo cuando se desea introducir un soporte adicional de reactivos en el sistema o si siendo una S/E alejada de la zona urbana, abastece pequeñas cargas internas y/o pequeños poblados cercanos a la S/E.

En este transformador, además del arrollamiento primario y secundario, es adicionado un tercer arrollamiento (terciario), normalmente operando a tensiones más bajas.

Ejemplo de tensiones nominales por fase: 138 KV, 69 KV y 13.8 KV en el primario, secundario y terciario respectivamente y conexión $Y - Y - \Delta$.

Ejemplos de transformadores de varios devanados usados en Colombia.

Relación de transformación (KV) ($L - L$)	Capacidad del Transformador (MVA) 3ϕ
230/115/34.5/13.8	150/40/12.5
230/115/34.5	150/40
230/44/110	180/60/180
110/44/13.2	60/20/60

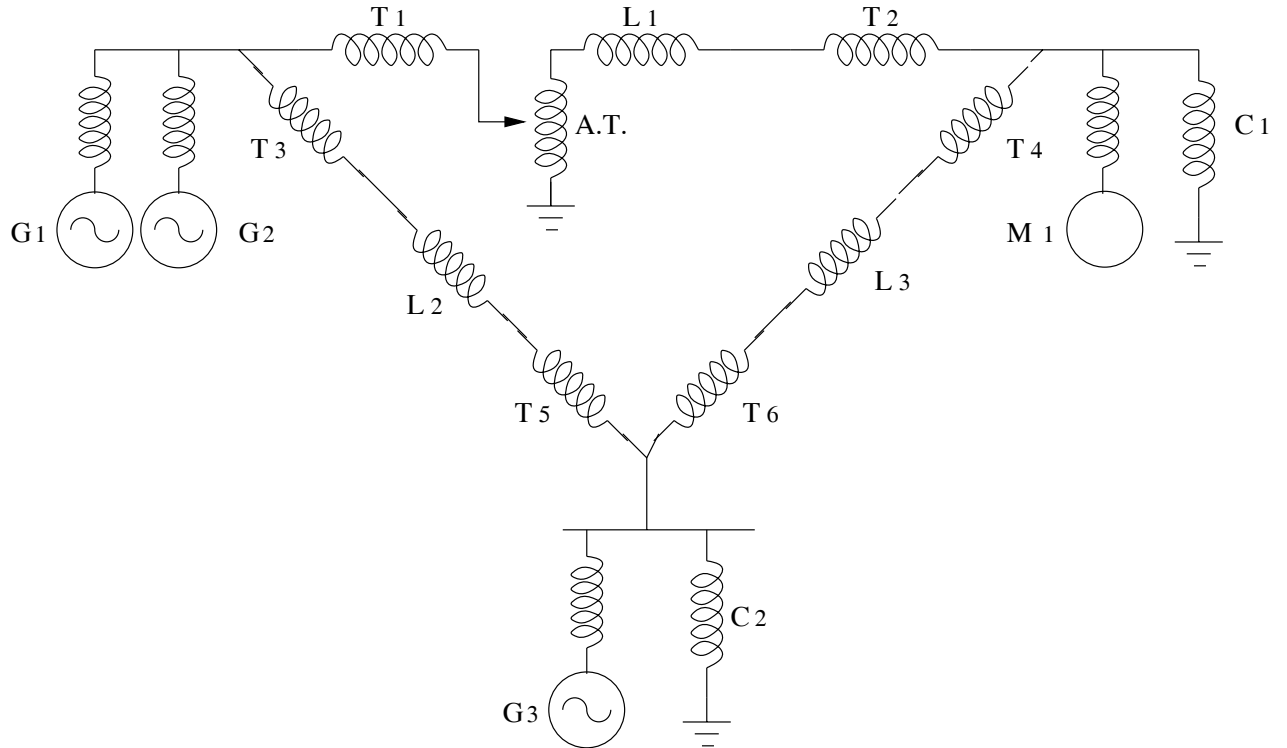


Figura 2.25: Circuito de malla cerrada con corrección de magnitud y ángulo a través de un transformador desfasador

El devanado terciario generalmente es conectado en delta y usado para:

- Suministrar camino a corrientes de secuencia cero.
 - Aplicaciones para corrección del factor de potencia, capacitores y/o inductores.
 - Alimentar pequeñas cargas
- a) Modelaje del transformador tridevanado: En la figura 2.26 se presenta un transformador monofásico de con tres arrollamientos.
- b) Condiciones de corto circuito y Circuito abierto: En la figura 2.27 se muestra el modelo del transformador de tres arrollamientos.

Los cinco parámetros que definen el modelo del transformador de tres arrollamientos son: Z_P, Z_S, Z_t, a_s y a_t

Pruebas necesarias para la obtención del modelo anterior:

- Con las condiciones secundario y terciario abierto se conocen las relaciones de transformación, así: $a_s \approx \frac{N_s}{N_p}$, $a_t \approx \frac{N_t}{N_p}$

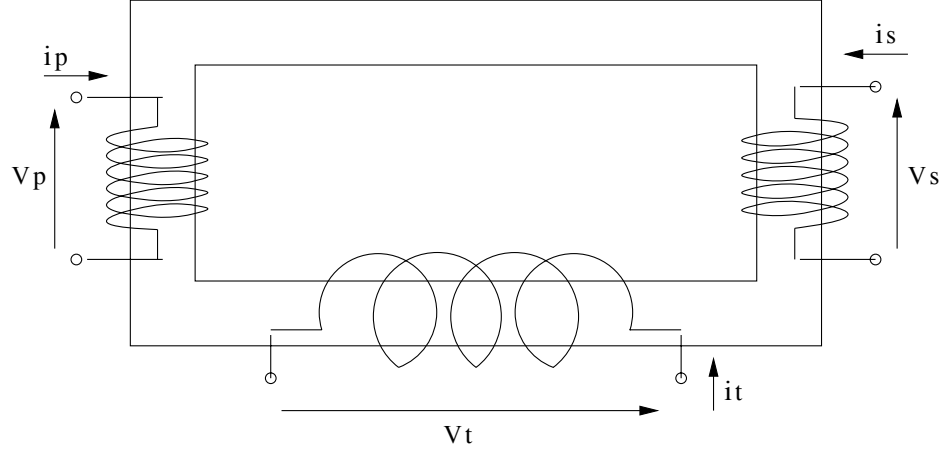


Figura 2.26: Transformador monofásico con tres arrollamientos

- Alimentando por el primario y con la condición secundario en corto y terciario abierto se determina: $Z_{PS} = Z_P + Z_S$
- Alimentando por el primario y con la condición secundario abierto y terciario en corto se determina: $Z_{Pt} = Z_P + Z_t$
- Alimentando por el secundario y con la condición primario abierto y terciario en corto se determina: $Z_{St} = (a_s^b)^2 (Z_S + Z_t)$; $a_s = \frac{N_S}{N_P}$

Con las últimas tres ecuaciones se podrán determinar las impedancias equivalentes Z_p , Z_s y Z_t

$$\begin{aligned} Z_p + Z_s &= Z_{ps} \\ Z_p + Z_t &= Z_{pt} \\ (a_s^b)^2 Z_s + (a_s^b)^2 Z_t &= Z_{st} \end{aligned}$$

Dadas las ecuaciones anteriores en notación matricial se obtiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & (a_s^b)^2 & (a_s^b)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_p \\ Z_s \\ Z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{ps} \\ Z_{pt} \\ Z_{st} \end{bmatrix}$$

Donde resultan las impedancias del modelo del transformador:

$$\begin{bmatrix} Z_p \\ Z_s \\ Z_t \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{(a_s^b)^2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{(a_s^b)^2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{(a_s^b)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{ps} \\ Z_{pt} \\ Z_{st} \end{bmatrix}$$

El valor de las impedancias del modelo del transformador es el siguiente:

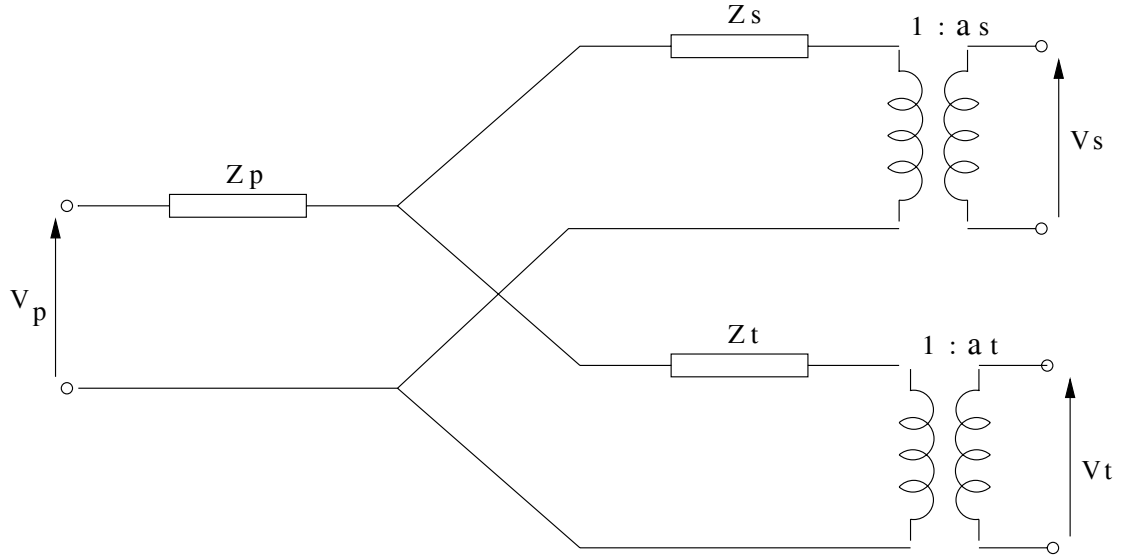


Figura 2.27: Modelo del transformador de tres arrollamientos

$$Z_p = \frac{1}{2}(Z_{ps} + Z_{pt} - Z_{st}/(a_s^b)^2)$$

$$Z_s = \frac{1}{2}(Z_{ps} - Z_{pt} + Z_{st}/(a_s^b)^2)$$

$$Z_t = \frac{1}{2}(-Z_{ps} + Z_{pt} + Z_{st}/(a_s^b)^2)$$

Ejemplo: Calcular para un transformador trifásico de tres devanados: Z_p , Z_s y Z_t en valores por unidad.

Los valores nominales trifásicos de un transformador de tres devanados son:

Primario: Conectado en estrella; 66 KV, 10 MVA

Secundario: Conectado en estrella; 13.2 KV, 7.5 MVA

Terciario: Conectado en Delta; 2.3 KV, 5.0 MVA

Despreciando el valor de la resistencia, las impedancias de pérdida obtenidas con las pruebas son:

$Z_{ps} = 7\%$ sobre la base de 10 MVA, 66 KV

$Z_{pt} = 9\%$ sobre la base de 10 MVA, 66 KV

$Z_{st} = 6\%$ sobre la base de 7.5 MVA, 13.2 KV

Determinar las impedancias del circuito equivalente conectado en estrella en valores por unidad, para una base de 10 MVA y 66 KV en el primario.

Las bases del circuito son entonces:

Pot. base (MVA)	Volt. base (KV)
$S_p^b = 10$	$V_p^b = 66$
$S_s^b = 10$	$V_s^b = 13.2$
$S_t^b = 10$	$V_t^b = 2.3$

Z_{ps} y Z_{pt} se han medido en el circuito primario y por consiguiente, estan expresadas en la base adecuada según la información suministrada para el circuito equivalente.

Para la adecuación de la información suministrada acerca del transformador a los valores base asignados solo es necesario modificar Z_{st} . En este, no es necesario el cambio de tensión, solo se requiere el cambio de potencia base así:

$$Z_{st} = 6\% \frac{10}{7.5} = 8\%$$

En por unidad, respecto a la base del sistema se tiene:

$$Z_p = \frac{1}{2}J (0.07 + 0.09 - 0.08) = J0,04 \text{ p.u.}$$

$$Z_s = \frac{1}{2}J (0.07 - 0.09 + 0.08) = J0,03 \text{ p.u.}$$

$$Z_t = \frac{1}{2}J (-0.07 + 0.09 + 0.08) = J0,05 \text{ p.u.}$$

El diagrama en p.u. del transformador tridevanado es el siguiente:

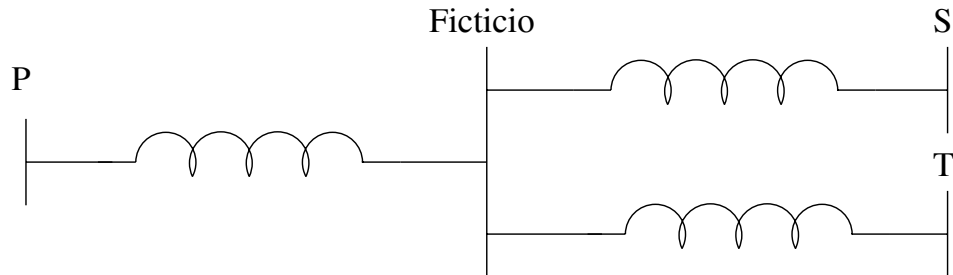


Figura 2.28: Diagrama en p.u. del transformador tridevanado

Si el transformador se supone instalado entre los nodos tres, cuatro y cinco de la siguiente figura:

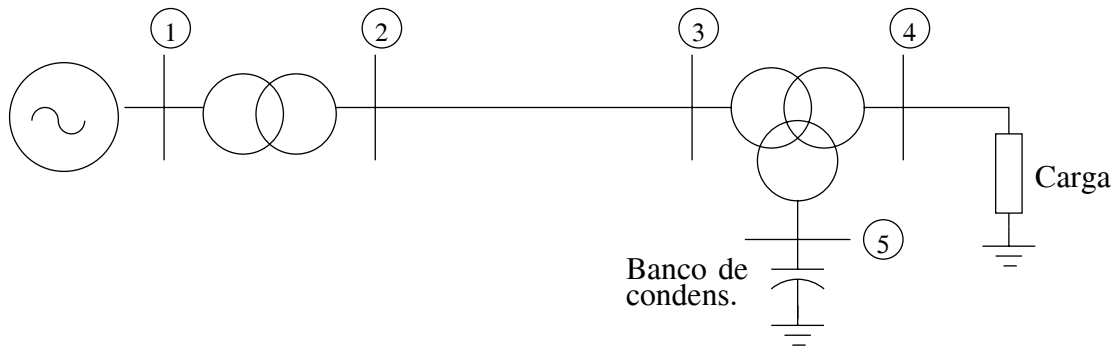


Figura 2.29: Diagrama de un sistema que contiene un transformador tridevanado

La representación de cada uno de los elementos del sistema es mostrado en la figura 2.30:

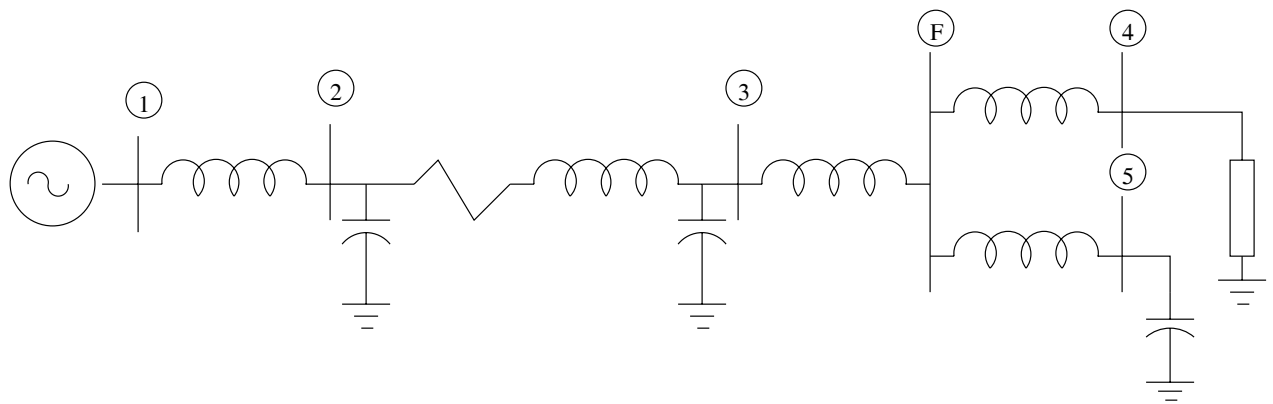


Figura 2.30: Representación del sistema que contiene un transformador tridevanado

Ejercicio: Determinar el diagrama de impedancias en por unidad del sistema de energía eléctrica mostrado a continuación.

Datos del sistema:

Líneas:

	$R(\Omega)$	$X(\Omega)$	$C(F)$	$Frecuencia(Hz)$
L_1	7	100	9×10^{-7}	60
L_2	9	110	8×10^{-7}	60

Transformadores:

Tipos de transformadores: T_1, T_2, T_3 (3 unidades monofásicas) y T_4 (Transformador trifásico)

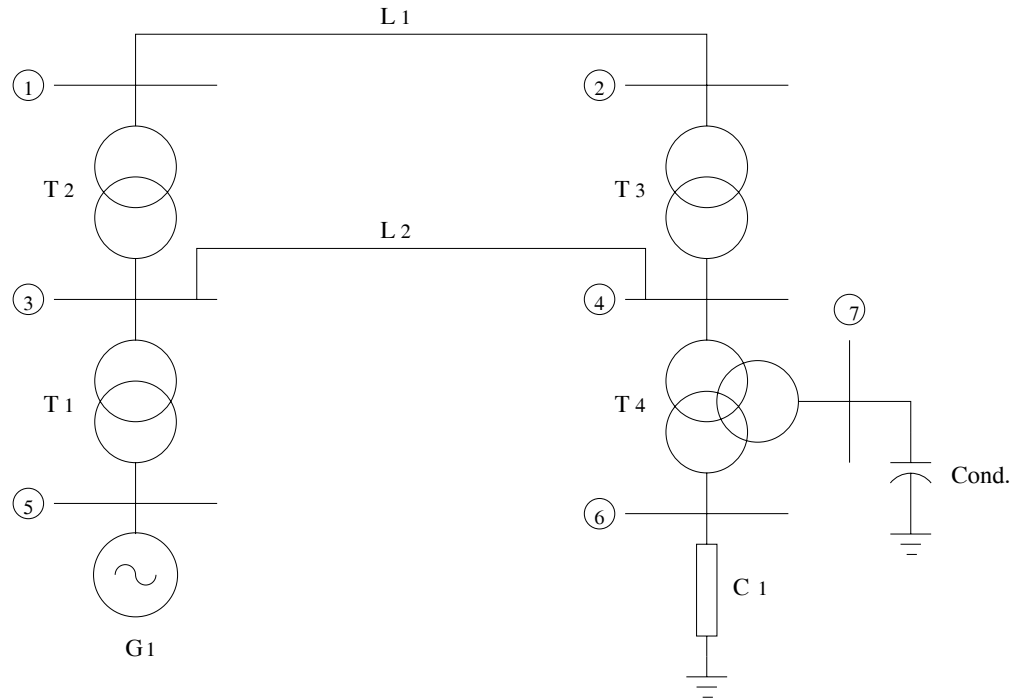


Figura 2.31: Diagrama de una red eléctrica de 7 nodos

a. Unidades monofásicas:

<i>Tipo</i>	<i>X(%)</i>	<i>Relación de Transf. (KV)</i>	<i>Conexión</i>	<i>Capacidad (MVA)</i>
T_1 (3(1 φ))	12	13.2/132.8	$\Delta - Y$	150
T_2 (3(1 φ))	14	127/288.7	$Y - Y$	60
T_3 (3(1 φ))	14	127/288.7	$Y - Y$	60

b. Transformador trifásico:

T_4 (3 φ) Transformador de tres devanados

Relación de transformación: 220/110/44 KV

Conexión: Y - Y - Δ

Impedancias en por unidad:

$$Z_{ps} = 0.18 \text{ p.u. (220 Kv, 180 MVA)}$$

$$Z_{pt} = 0.28 \text{ p.u. (220 Kv, 180 MVA)}$$

$$Z_{st} = 0.16 \text{ p.u. (110 Kv, 100 MVA)}$$

Generador:

	Voltaje (KV)	Factor de pot.	Capacidad (MW)	React. Subtrans.	X'' (%)
G_1	13.8	0.85	125	25	

Carga:

	Voltaje (KV)	Potencia (MW)	Factor de potencia
C_1	110	60	0.85

Condensador:

	Voltaje nominal (Kv)	Capacidad (MVAR)
C	44KV	30

Nota: $V_{Base} = 500$ KV en el nodo 1, $P_{Base} = 100$ MW

2.3.10 Modelo del Transformador con Taps - control de voltaje en transformadores

$$i_t = (V_t - V_2)Y \text{ e } i_2 = -i_t \Rightarrow i_2 = -(V_t - V_2)Y$$

Expresando las dos ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} i_t \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & -Y \\ -Y & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_t \\ V_2 \end{bmatrix}$$

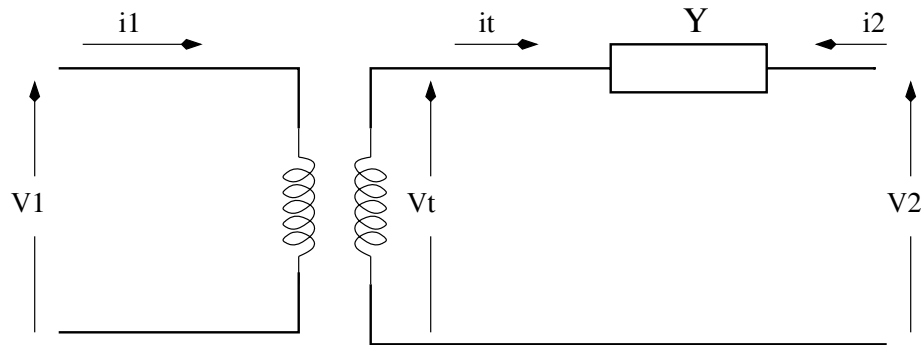


Figura 2.32 Modelo del transformador con taps

Las relaciones de voltaje y de corriente se expresan así:

$$\frac{i_1}{i_t} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow i_1 = \frac{n_2}{n_1} i_t$$

$$\frac{V_1}{V_t} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow V_1 = \frac{n_1}{n_2} V_t$$

$$\text{Se tiene que: } a = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow t = \frac{1}{a} \Rightarrow i_1 = t * i_t \text{ y } V_1 = \frac{1}{t} V_t$$

$$t = \text{Variación del taps en p.u.} \Rightarrow t = \frac{n_2}{n_1} / \frac{n_2 - \text{nominal}}{n_1 - \text{nominal}} \text{ p.u.}$$

al reemplazar las variables V_t e I_t en las ecuaciones anteriores se obtiene:

Relación de corriente: $i_1 = t i_t \Rightarrow i_t = i_1/t$

$$i_1 = t V_t Y - t V_2 Y$$

$$i_2 = -V_t Y + Y V_2$$

Relación de voltaje: $V_1 = \frac{1}{t} V_t \Rightarrow V_t = V_1 t$

$$i_1 = t^2 V_1 Y - t V_2 Y$$

$$i_2 = -V_1 t Y + Y V_2$$

Expresado en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 Y & -t Y \\ -t Y & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Suponiendo que $k = 1$ y $m = 2$

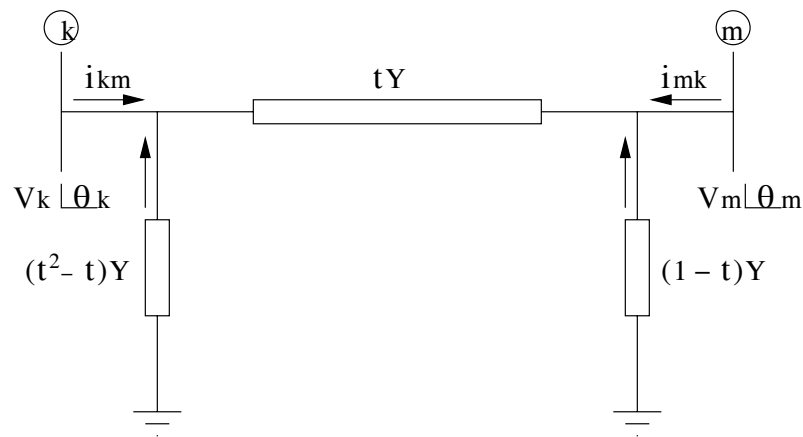


Figura 2.33 Modelo del transformador con taps

2.3.11 Transformadores en paralelo

Dos transformadores conectados en paralelo alimentan una impedancia a neutro por fase de $(1 + j 0.6)$ p.u. a un voltaje de $1 \angle 0^\circ$ p.u.

Los transformadores tienen las siguientes características:

	<i>Rel. de Transf.</i>	<i>Capacidad</i>	<i>Impedancia</i>
<i>Transf. 1</i>	115/34.5 KV	25 MVA	$J 11.8\%$
<i>Transf. 2</i>	115/37.6 KV	20 MVA	$J 6.4\%$

El transformador 1 tiene una relación de transformación igual a la de los voltajes base tanto en el primario como en el secundario. El transformador 2 tiene una elevación de tensión hacia el lado de la carga de 1.09 veces la del transformador 1.

Bases del sistema: 115/34.5 KV y 100 MVA

- Transformador 1

Observando la información solo se requiere un cambio de base de potencia así:

$$Z_{t1} \text{ p.u.} = 0.118 \frac{100}{25} = J 0.472 \text{ p.u.}$$

- Transformador 2

Se supone que el voltaje base con el cual se obtuvieron los valores en p.u. corresponden al primario. Así solo se requiere corrección de potencia a fin de adecuar a las bases del sistema.

$$Z_{t2} \text{ p.u.} = 0.064 \frac{100}{20} = J 0.32 \text{ p.u.}$$

Valor del movimiento del tap: 1.09

Corrección del transformador 2

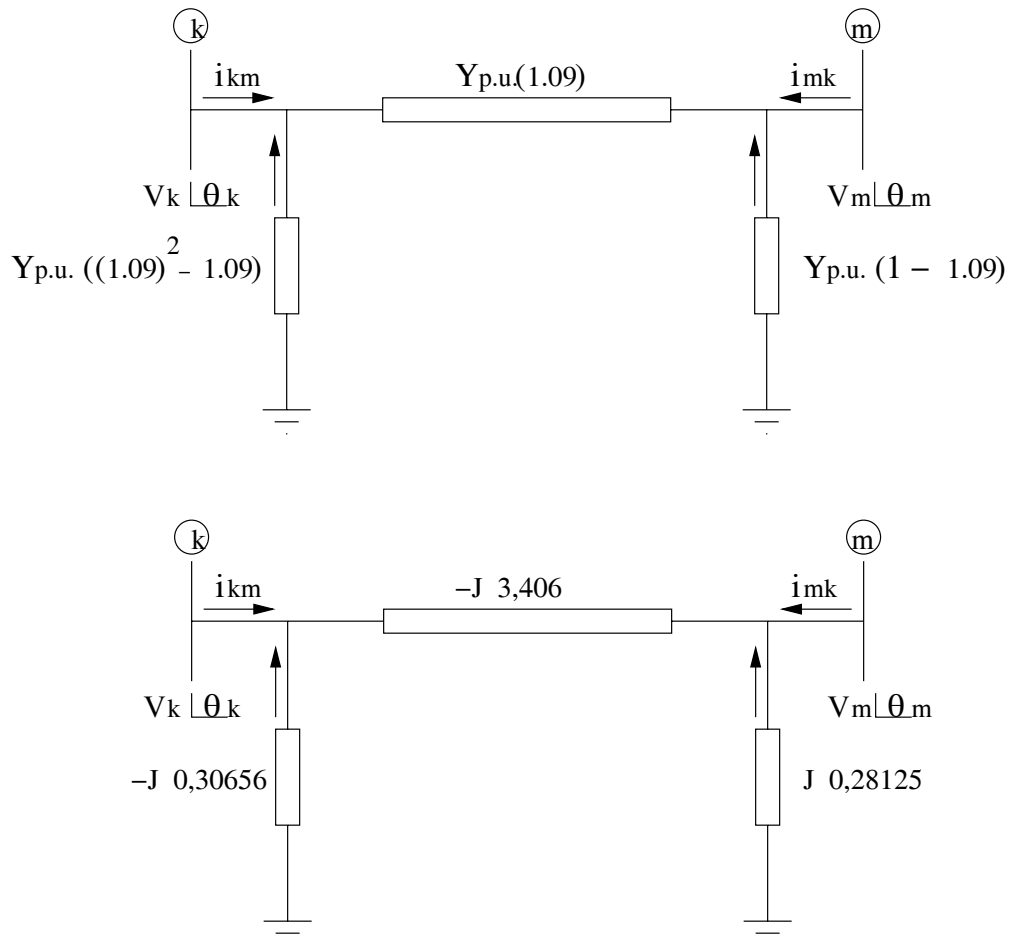


Figura 2.34 Modelo del transformador con taps

La figura 2.35 muestra el modelo de los transformadores operando en paralelo. Resolver este modelo usando la matriz Y_{Bus} y calcular el flujo de potencia por cada transformador.

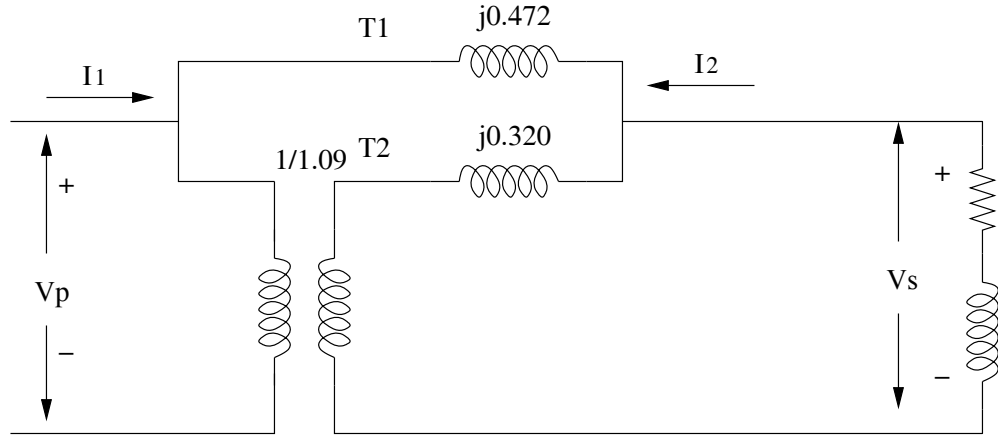


Figura 2.35 Modelo de transformadores en paralelo

Procedimiento para el cálculo del flujo de potencia por los transformadores:

- Cálculo de corrientes inyectadas en el transformador 1:

$$\begin{bmatrix} I_1^1 \\ I_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^1 & -y^1 \\ -y^1 & y^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

- Cálculo de corrientes inyectadas en el transformador 2:

$$\begin{bmatrix} I_1^2 \\ I_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 y^2 & -t y^2 \\ -t y^2 & y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

- Conectados los transformadores en paralelo, se determina la corriente inyectada en el primario y secundario.

$$I_1 = I_1^1 + I_1^2 \quad I_2 = I_2^1 + I_2^2$$

sumando los modelos matriciales del transformador 1 y 2 se obtiene:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^1 + t^2 y^2 & -y^1 - t y^2 \\ -y^1 - t y^2 & y^1 + y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

- Del modelo anterior se determina el voltaje en el primario, con base en la segunda ecuación.

$$\begin{bmatrix} I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y^1 - ty^2 & y^1 + t^2y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Se conoce el valor de $V_2 = 1\angle 0^\circ$ y se despaja V_1 . El valor de la corriente de carga I_2 se calcula con base en el valor de la carga y el voltaje V_2 .

Se regresa a los modelos de los transformadores y se calcula el flujo de corriente que aporta cada uno de ellos en el lado de la carga, I_2^1, I_2^2 .

Con base en las corrientes anteriores calcular el flujo de potencia que aporta cada transformador a la carga.

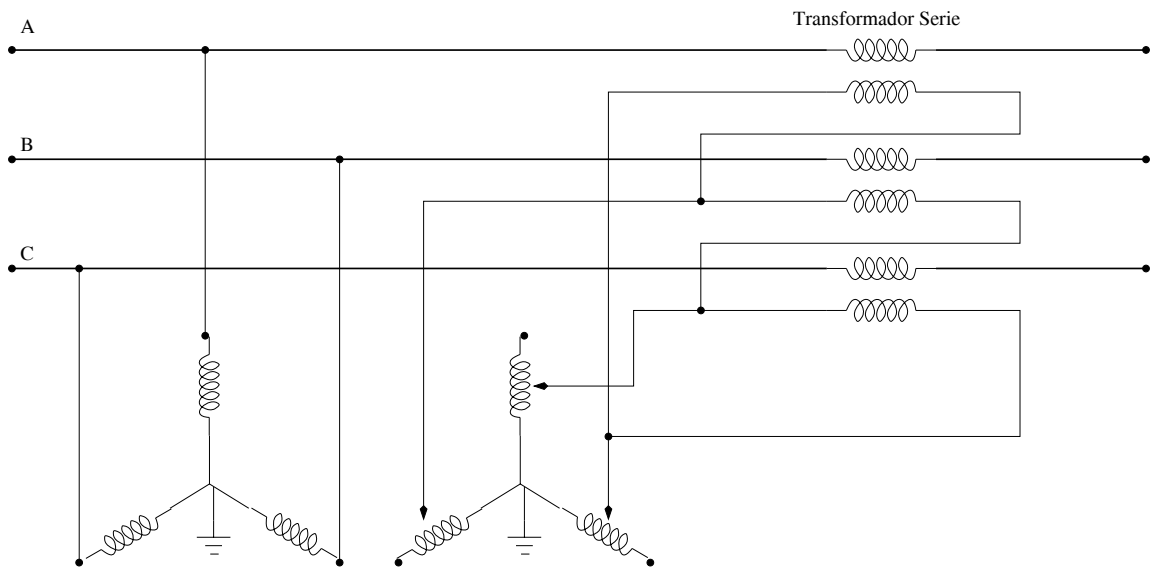


Figura 2.36 Transformador regulante para el control de la magnitud del Voltaje

2.4 Flujo de Potencia en transformadores desfasadores

El modelo correspondiente es dado por una reactancia serie que representa la reactancia transitoria del transformador y por un transformador ideal con relación de transformación compleja conforme se ilustra a seguir.

Las expresiones a ser deducidas son importantes también en el modelaje que involucra transformadores $\Delta - Y$ no compensados.

Como en el transformador ideal no existen pérdidas entonces:

$$P_{kl} = P_{Fl} \text{ y } Q_{kl} = Q_{Fl}$$

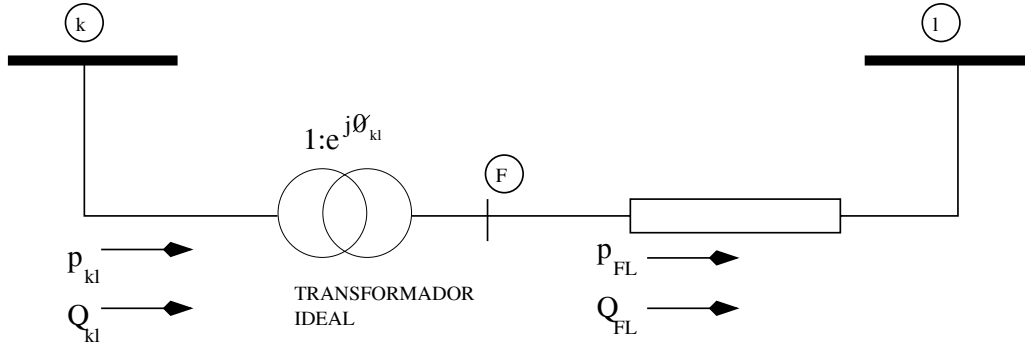


Figura 2.37 Modelo del transformador desfasador

Entre los nodos F y L se tiene la impedancia de dispersión del transformador. Así se puede aplicar para el cálculo de los flujos P_{kl} y Q_{kl} las expresiones de los flujos por las líneas, bastando para eso ignorar los elementos shunt, así:

$$P_{Fl} = V_F^2 g_{kl} - V_F V_l g_{kl} \cos \theta_{Fl} - V_F V_l b_{kl} \sin \theta_{Fl}$$

$$Q_{Fl} = -V_F^2 b_{kl} - V_F V_l g_{kl} \sin \theta_{Fl} + V_F V_l b_{kl} \cos \theta_{Fl}$$

Las condiciones terminales para el transformador ideal $K - F$ son dadas por:

$$V_F = V_k a ; P_{Fl} = P_{Kl}$$

$$\theta_F = \theta_k + \phi_{kl} ; Q_{Fl} = Q_{kl}$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones P_{Fl} y Q_{Fl} , se obtiene:

$$P_{kl} = (V_k a)^2 g_{kl} - (V_k a) V_l g_{kl} \cos(\theta_{kl} + \phi_{kl}) - (V_k a) V_l b_{kl} \sin(\theta_{kl} + \phi_{kl})$$

$$Q_{kl} = -(V_k a)^2 b_{kl} - (V_k a) V_l g_{kl} \sin(\theta_{kl} + \phi_{kl}) + (V_k a) V_l b_{kl} \cos(\theta_{kl} + \phi_{kl})$$

CAPÍTULO 3

OPERACIÓN DE LOS SISTEMAS DE POTENCIA

3.1 Estado de la operación

Un sistema de potencia puede operar en diferentes estados dependiendo de las condiciones establecidas para el mismo. En la figura 3.1 se presenta un diagrama con los diferentes estados de transición.

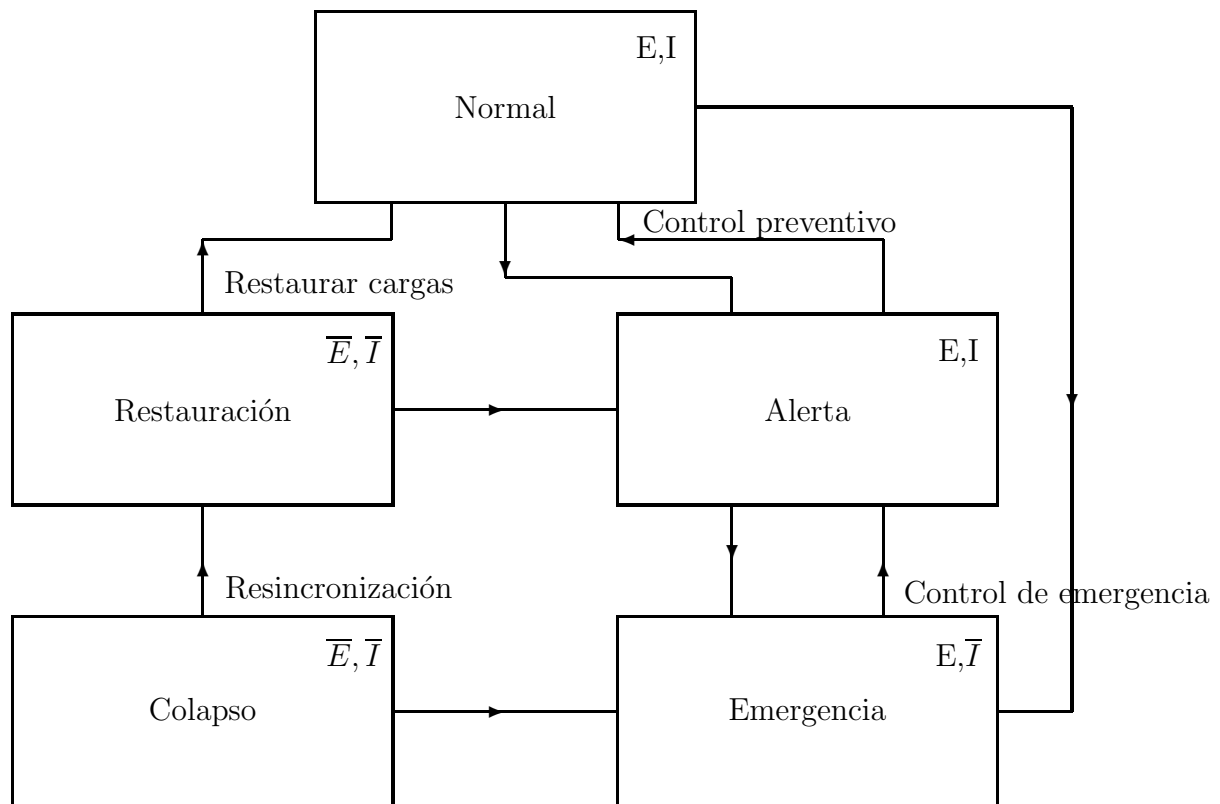


Figura 3.1: Estados de la operación de un sistema de energía eléctrica

En mas del 99% del tiempo el sistema opera en el estado normal. En este estado tanto la frecuencia como el voltaje presentan los valores preestablecidos para funcionamiento normal. Estos valores de frecuencia y voltaje resultan de mantener un balance entre la potencia activa y reactiva demandadas por las cargas y la potencia activa y reactiva abastecida por las fuentes de generación.

La igualdad entre generación y demanda es un prerequisite fundamental para que el sistema opere normalmente, indicado por el símbolo (E). El segundo símbolo (I), indica que ciertas inigualdades pueden presentarse en el estado normal.

El estado normal también puede ser caracterizado por un cierto nivel de seguridad que requiere un cierto margen de generación en la forma de reserva rodante.

Si el control preventivo falla o si ocurre un fallo severo, el sistema en ocasiones podrá entrar en un estado de emergencia. Este estado de emergencia podrá ser alcanzado directamente del estado normal o a través del estado de alerta.

Si las acciones de control de emergencia fallan, el sistema entra en colapso, desconectando partes del sistema y conformando sistemas aislados. Algunos de estos sistemas aislados pueden contener suficiente generación para abastecer las cargas.

Si muchos de los generadores salen de operación, los que queden operando son sobrecargados, entonces el sistema podrá entrar en un punto de "blackout" total.

La cadena de eventos que lleva el sistema de un estado normal al colapso puede ocurrir en unos pocos segundos o en varios minutos. El proceso de restauración es mucho más lento, que puede tomar algunas horas y en ocasiones hasta días.

Algunos de los problemas a estudiar en la operación de los sistemas de potencia en estado normal son los siguientes:

- Relación MW - Frecuencia
- Relación MVAR - Voltaje
- Problema de Flujo de Potencia
- Despacho económico
- El problema del control.

3.2 Características de la carga

Carga es todo equipo que toma energía eléctrica del sistema. Por ejemplo: Lámparas, todos los electrodomésticos, los motores eléctricos, hornos eléctricos, etc. Así tenemos varios tipos de carga:

- Motores en general

- Equipos de calentamiento
- Equipos electrónicos
- Equipo de iluminación

Desde el punto de vista del sistema de energía eléctrica, las cargas pueden ser separadas en tres (3) grupos:

- Cargas domiciliarias
- Cargas industriales
- Cargas con fines comerciales

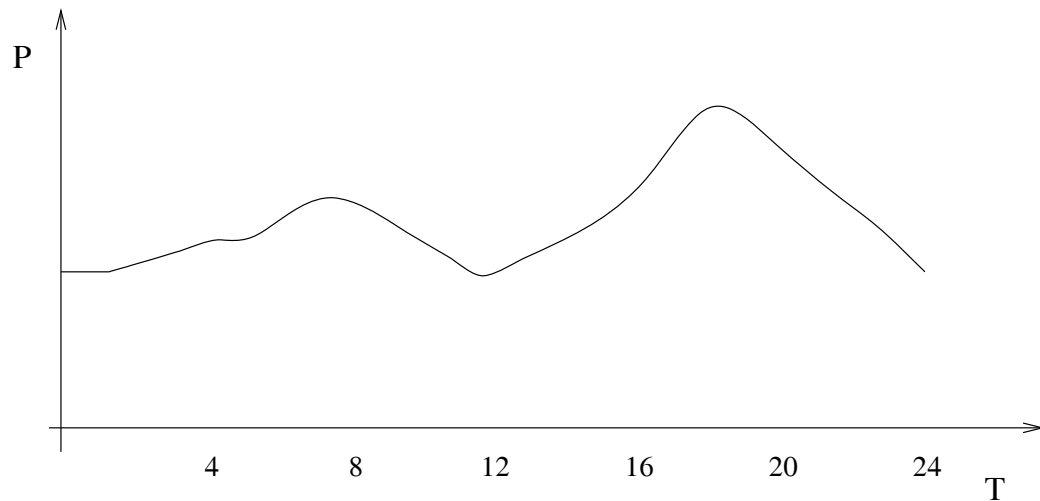


Figura 3.2: Curva típica de duración de la Carga

Estas cargas presentan características muy diferentes con relación al tamaño, simetría (1ϕ o 3ϕ), constancia de la carga y el período de funcionamiento.

En un sistema eléctrico bien proyectado, las cargas presentan las siguientes características:

- En los niveles de transmisión y subtransmisión, las cargas son altamente previsibles.
- Las grandes cargas varían de manera previsible
- Las variaciones de carga generalmente son muy lentas cuando son comparadas con las constantes de tiempo del sistema de energía eléctrica; así este es considerado como operando en régimen permanente.

- La carga típica consume potencia reactiva; esto es, la carga típica es inductiva por la presencia de los motores eléctricos.
- La carga típica es simétrica. Todos los equipamientos 3ϕ son balanceados (equilibrados). Las cargas monofásicas son distribuidas de manera adecuada en las fases del sistema. El número muy elevado de cargas lleva desde el punto de vista estadístico, a una distribución uniforme (esto es, carga equilibrada).

3.2.1 Variación de la carga con la tensión y la frecuencia

Veamos que ocurre con una carga simple como es el caso de la carga inductiva mostrada en la figura.

Potencia consumida por la carga: $S = E_k I_k^*$; Donde:

$$E_k = V_k e^{j\theta_k}, \text{ si } \theta_k = 0 \Rightarrow E_k = V_k e^{j0^\circ}$$

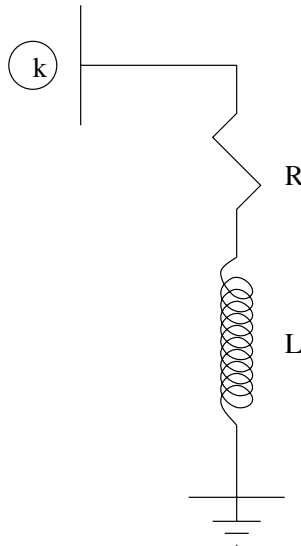


Figura 3.3: Modelo de la carga como Impedancia Serie

$$S = E_k \left(\frac{E_k^*}{Z^*} \right) = \frac{E_k^2}{Z^*} = \frac{V_k^2}{(R - j\omega L)}$$

$$S = \frac{V_k^2}{(R - j\omega L)} \cdot \frac{(R + j\omega L)}{(R + j\omega L)} = \frac{RV_k^2}{R^2 + (\omega L)^2} + j \frac{\omega LV_k^2}{R^2 + (\omega L)^2}$$

Ya que $S = P + jQ$, entonces:

$$P_k = \frac{RV_k^2}{R^2 + (\omega L)^2}; \quad Q_k = \frac{\omega LV_k^2}{R^2 + (\omega L)^2}$$

Como $\omega = 2\pi.f$, entonces:

$$P_k = \frac{RV_k^2}{R^2 + (2\pi.f.L)^2}; \quad Q_k = \frac{\omega LV_K^2}{R^2 + (2\pi.f.L)^2}$$

Observaciones:

- P_k y Q_k crecen con el cuadrado de la tensión aplicada V_k .
- Cuando la frecuencia f aumenta, P_k disminuye, y Q_k lo hace en menor proporción.

En general para todas las cargas existen relaciones del tipo:

$$P_k = P_k(f, V_k)$$

$$Q_k = Q_k(f, V_k)$$

Para pequeñas variaciones de ΔP y ΔQ producidas por pequeñas variaciones Δf y ΔV , de P_k y Q_k , tenemos que:

$$\Delta P \approx \frac{\partial P}{\partial f} \Delta f + \frac{\partial P}{\partial V} \Delta V; \quad \Delta Q \approx \frac{\partial Q}{\partial f} \Delta f + \frac{\partial Q}{\partial V} \Delta V$$

Observaciones:

Para el caso de un conjunto de cargas, simultáneamente no es posible obtener relaciones analíticas. En este caso son obtenidas empíricamente valores típicos para las derivadas parciales, de acuerdo con los tipos de carga (cargas compuestas).

3.3 El balance de potencia activa y sus efectos sobre la frecuencia del sistema

Por qué es deseable que la frecuencia de un sistema se mantenga estable ?

Por que varía la frecuencia de un sistema ?

Es deseable que la frecuencia se mantenga estable porque:

- La mayoría de los tipos de motores de corriente alterna giran con velocidades directamente relacionadas con la frecuencia. Si la frecuencia varía $\Rightarrow$ varía la velocidad de giro de los motores del sistema.

- En los sistemas eléctricos modernos, la frecuencia es mantenida en el siguiente intervalo:
 $f = 60 \pm 0,02 Hz$.

La frecuencia está íntimamente relacionada con el balance de potencia activa en el sistema eléctrico.

Diagrama de flujo de potencia en un sistema de potencia:

- Turbina** (fuente de potencia mecánica) está conectada al **Generador**.
- El **Generador** produce **Energía eléctrica generada**.
- La **Energía eléctrica generada** fluye hacia la **Carga**.
- La **Carga** consume **Energía eléctrica consumida**.
- La diferencia entre la energía generada y la consumida es la **Energía cinética de la inercia del sistema (constante)**.
- Se indican la frecuencia f y la velocidad angular ω .

Si los generadores giran en sincronismo $\Rightarrow$ Funcionamiento estable.

Súbitamente acontece una pequeña disminución en la carga. Disminuye la carga entonces:

- 68

- Aumenta la frecuencia $\Rightarrow$ aumenta la energía cinética de la inercia del sistema y aumenta el consumo de energía en los motores (carga) y otros dispositivos.

Así el sistema se equilibra en otro valor de frecuencia superior al anterior:

$$f_{nuevo} = f_{anterior} + \Delta f$$

La disminución de la carga fue compensada por el incremento de consumo de energía en otras cargas y en este pasaje al nuevo punto de equilibrio. La energía cinética de la inercia del sistema también se incrementa hasta atender un nuevo valor en el nuevo punto de equilibrio.

Desequilibrio (Incremento de la Carga)

Súbitamente acontece un aumento de carga del sistema. En este caso ocurre exactamente lo contrario.

Aumento de carga	$\Rightarrow$	La frecuencia disminuye
Disminución de la carga	$\Rightarrow$	La frecuencia aumenta

Observación:

En la práctica la variación de la frecuencia es usada para controlar el abastecimiento de energía mecánica de las turbinas. Esto es llevado a cabo con un sistema de control.

3.4 El balance de la potencia reactiva y su efecto sobre la tensión del sistema

Si existe un equilibrio entre la potencia reactiva generada y consumida, entonces el módulo de las tensiones de las barras prácticamente no varían.

Así, la variación del módulo de la tensión en las barras está asociado al desequilibrio entre la potencia reactiva producida y consumida. Es altamente deseable un perfil constante de tensión, lo que implica que el módulo de las tensiones del sistema prácticamente no varíen.

Análisis Simplificado (Sistema de dos Barras):

Estudiar el efecto de la variación de la potencia reactiva con la variación del módulo de tensión.

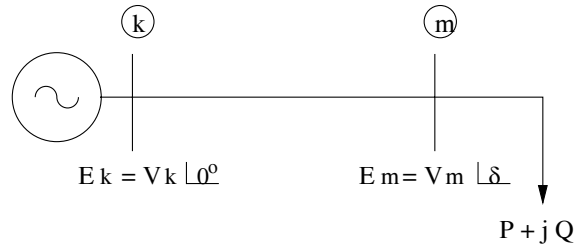


Figura 3.5: Sistema simplificado de dos barras

Simplificaciones:

- V_k es mantenido constante
- La impedancia de la línea es puramente inductiva: $Z = jX_{km}$
- La potencia en la línea es igual a $P + jQ$ (No se tienen en cuenta las pérdidas activas y reactivas en la línea)

$$E_m = E_k - i_{km}(jX_{km})$$

$$E_k i_{km}^* = P + jQ$$

De la ecuación anterior se obtiene:

$$i_{km}^* = \frac{P + jQ}{E_k} = \frac{P + jQ}{V_k \angle 0^\circ} \Rightarrow i_{km} = \frac{P - jQ}{V_k}$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores:

$$E_m = V_k \angle 0^\circ - \left(\frac{P - jQ}{V_k} \right) (jX_{km})$$

$$E_m = \left[V_k - \frac{X_{km}}{V_k} Q \right] - j \left[\frac{X_{km}}{V_k} P \right]$$

De la grafica se observa que:

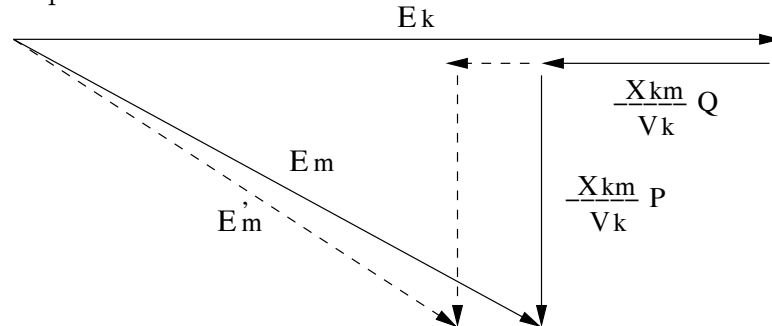


Figura 3.6: Diagrama de voltajes

- Una variación de P influye en la componente perpendicular a E_k y no influye de manera significativa en el módulo de E_m .
- Una variación de Q influye en la componente en fase con E_k y afecta de manera significativa en el módulo de E_m .

Así para mantener constante el valor de V_m , debemos resolver la variación de Q en la propia barra m usando generadores de potencia reactiva en m (o consumidores).

Cuando el Sistema Opera

- Con carga pico (máxima), aumentan las necesidades de potencia activa y reactiva; entonces, la tendencia de V_m es a disminuir y por lo tanto, se debe colocar capacitores sincrónicos en m para generar la potencia reactiva necesaria.
- Con carga baja (mínima), el efecto capacitivo de la línea de transmisión genera potencia reactiva mayor que la necesaria en la carga, y en este caso el flujo de potencia reactiva puede ser invertido, lo que lleva a un aumento de tensión; entonces puede ser necesario instalar consumidores de potencia reactiva en la barra m , esto es, se deben colocar reactores en paralelo.

Porqué es importante mantener un perfil adecuado de tensión ?

Porque todos los equipos eléctricos son proyectados para operar con la llamada tensión nominal y pueden presentar problemas de funcionamiento y de duración en estos equipos cuando son operados con otros valores de tensión. En general la tensión es controlada con los taps de los transformadores, compensación reactiva capacitiva e inductiva, motores y generadores sincrónicos.

Ejemplo: En el sistema mostrado en la figura 3.7, determinar la potencia generada en cada generador, a fin de mantener un perfil de tensión de $V_1 = V_2 = 1$ p.u. Además determinar las pérdidas. Para su desarrollo se sugiere utilizar las ecuaciones de inyecciones de potencia y/o de flujo potencia descritas en capítulos anteriores.

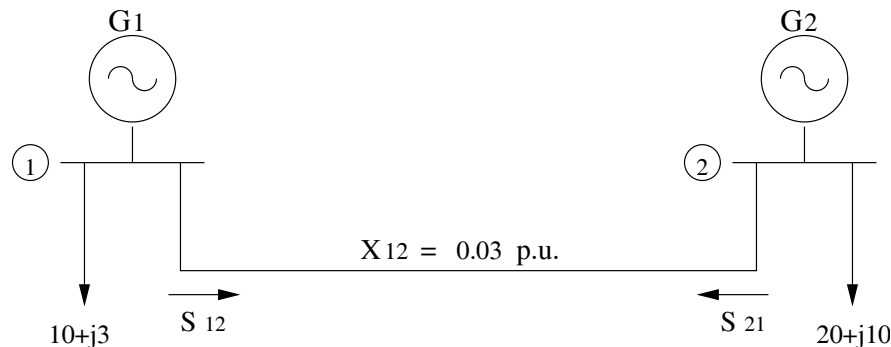


Figura 3.7: Sistema eléctrico de dos barras

Dado:

$$E_2 = V_2 \angle 0^\circ = 1 \angle 0^\circ \quad \text{y} \quad E_1 = V_1 \angle \theta_1 - \theta_2 = 1 \angle \delta$$

$$P_{12} = 10 \text{ p.u.} \quad \text{y} \quad b_{12} = -\frac{1}{X_{12}} = -\frac{1}{0.03} = -\frac{100}{3}$$

Determinar: $P_{G_1}, Q_{G_1}, P_{G_2}, Q_{G_2}$

Conocidas las variables de estado, voltajes de nodo, se podrán determinar las demás variables de la red. Para este ejemplo fueron especificadas las magnitudes de los voltajes nodales, por lo tanto se deberá calcular los ángulos. Inicialmente se determina la diferencia angular $\angle \theta_1 - \theta_2$.

Dada la ecuación de flujo de potencia activa y reactiva:

$$P_{12} = V_1^2 g_{12} - V_1 V_2 g_{12} \cos(\theta_1 - \theta_2) - V_1 V_2 b_{12} \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$Q_{12} = -V_1^2 b_{12} - V_1 V_2 g_{12} \sin(\theta_1 - \theta_2) + V_1 V_2 b_{12} \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\text{Del ejemplo se sabe que : } g_{12} = 0 \quad \text{y} \quad b_{12} = -\frac{100}{3}$$

$$P_{12} = -(-\frac{100}{3}) \sin(\theta_1 - \theta_2) \Rightarrow \sin(\theta_1 - \theta_2) = \frac{3}{10} \Rightarrow (\theta_1 - \theta_2) = 17,458^\circ$$

$$\text{Como } \theta_2 = 0^\circ \Rightarrow \theta_1 = 17,458^\circ$$

$$\text{Así: } E_1 = V_1 \angle 17,458^\circ \quad \text{y} \quad E_2 = V_2 \angle 0^\circ = 1 \angle 0^\circ$$

Cálculo de la potencia inyectada en los nodos 1 y 2:

$$\text{Formula utilizada: } S_k = E_k \sum_{i=1}^n Y_{ki}^* E_i^*$$

Potencia inyectada en los nodos 1 y 2:

$$S_1 = E_1 (Y_{11}^* E_1^* + Y_{12}^* E_2^*) \quad \text{y} \quad S_2 = E_2 (Y_{21}^* E_1^* + Y_{22}^* E_2^*)$$

$$Y_{Bus} = j \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{100}{3} & \frac{100}{3} \\ \frac{100}{3} & -\frac{100}{3} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$S_1 = 1\angle 17,458^\circ \left(\frac{100}{3} \angle 90^\circ \times 1\angle -17,458^\circ + \frac{100}{3} \angle -90^\circ \times 1\angle 0^\circ \right) = 10 + j1.5354$$

$$S_2 = 1\angle 0^\circ \left(\frac{100}{3} \angle -90^\circ \times 1\angle -17,458^\circ + \frac{100}{3} \angle 90^\circ \times 1\angle 0^\circ \right) = -10 + j1.5354$$

Ecuaciones de balance nodal:

$$\text{Nodo 1: } (P_1 + jQ_1) = (P_{G_1} + jQ_{G_1}) - (P_{D_1} + jQ_{D_1})$$

$$\text{Nodo 2: } (P_2 + jQ_2) = (P_{G_2} + jQ_{G_2}) - (P_{D_2} + jQ_{D_2})$$

Reemplazando valores se obtiene:

$$\text{Nodo 1: } (P_{G_1} + jQ_{G_1}) = (P_1 + jQ_1) + (P_{D_1} + jQ_{D_1}) \Rightarrow$$

$$(P_{G_1} + jQ_{G_1}) = (10 + j1.5354) + (10 + j3) \Rightarrow P_{G_1} = 20 p.u. \quad \text{y} \quad Q_{G_1} = 4.5354 p.u.$$

$$\text{Nodo 2: } (P_{G_2} + jQ_{G_2}) = (P_2 + jQ_2) + (P_{D_2} + jQ_{D_2}) \Rightarrow$$

$$(P_{G_2} + jQ_{G_2}) = (-10 + j1.5354) + (20 + j10) \Rightarrow P_{G_2} = 10 p.u. \quad \text{y} \quad Q_{G_2} = 11.5354 p.u.$$

Pérdidas de potencia reactiva:

$$Q_e = -b_{km} [V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos \delta] = -b_{km} |E_1 - E_2|^2$$

$$Q_e = -b_{12} [V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2 \cos \delta]$$

$$Q_e = - \left[-\frac{100}{3} \right] [1^2 + 1^2 - (2) \cdot (1) \cdot (1) \cdot \cos 17,458^\circ]$$

$$Q_e = 3.07 \text{ p.u.}$$

Ejercicio: Otra forma de resolver el ejemplo anterior es utilizando las ecuaciones de flujo de potencia activa y reactiva a través de una línea, descritas en capítulos anteriores. Resolver este ejemplo utilizando estas ecuaciones.

CAPÍTULO 4

MÉTODOS NUMÉRICOS EN EL ANÁLISIS DE SISTEMAS DE POTENCIA

4.1 Introducción

La aplicación de los métodos numéricos ha facilitado al analista el uso del computador para la solución de los problemas planteados en Ingeniería eléctrica.

Entre las tareas que realiza el analista de redes eléctricas planteadas de manera global, se definen entre otras las siguientes:

- Definir en forma clara el área y fenómeno físico que desea manejar, controlar o analizar.
- Expresar el comportamiento por medio de ecuaciones (modelo matemático).

Las ecuaciones resultantes de plantear el modelo matemático pueden ser del tipo: Algebraico Lineal o no lineal, diferenciales, etc. Con la ayuda del computador y de los métodos numéricos se resuelve el modelo matemático mencionado anteriormente.

Una de las tareas del analista de redes es el de estudiar la forma como deberán ser resueltas las ecuaciones y seleccionar el modelo matemático más adecuado para su solución. También deberá contemplar la posibilidad de que el modelo sea resuelto sin sufrir modificaciones o si por el contrario tenga que recurrir a modificaciones o simplificaciones, sin desmejorar en los resultados.

En la selección del método matemático se deberán satisfacer varias características entre las que cabe destacar el grado de precisión y tiempo de cálculo.

Los métodos numéricos que serán estudiados son:

- Métodos para inversión de matrices
- Método iterativo Gauss y Gauss Seidel
- Newton Raphson

El primero es utilizado en la solución de ecuaciones algebraicas lineales o linealizadas. El método de Newton Raphson es el de mayor aplicación en la solución de ecuaciones algebraicas no lineales que resultan de plantear el modelo matemático del problema de flujo de potencia.

4.2 Métodos de solución de ecuaciones simultáneas algebraicas lineales

El modelo matemático planteado es del tipo lineal y las ecuaciones que conforman dicho modelo podrán ser del tipo de igualdad y/o desigualdad.

Ecuaciones planteadas en un modelo Lineal:

$$\begin{array}{rcl} F_1(X_1, X_2, \dots, X_n) & = & Y_1 \\ \vdots & & \vdots \\ F_n(X_1, X_2, \dots, X_n) & = & Y_n \end{array}$$

Representando un sistema de n ecuaciones Lineales en función de n incógnitas ($X_1, X_2, \dots, X_n$) y siendo ($Y_1, \dots, Y_n$) las variables conocidas, denominado también como vector independiente. En la mayoría de los casos, los sistemas son representados de manera exacta por medio de modelos no lineales; es así como en muchas de las aplicaciones en ingeniería eléctrica una representación no lineal de segundo orden resulta ser lo suficientemente precisa. Sin embargo y debido a la complejidad de los mismos en algunas ocasiones se recurre a la simplificación de dichos modelos, ya sea determinando un modelo lineal o linealizando el mismo.

La representación lineal de los sistemas es muy frecuente sin sacrificar exactitud en los resultados, con la ventaja de que el modelo requerirá de menos tiempo de computación y fácil de implementar.

Ecuaciones Lineales, como las que relaciona la corriente nodal I_N y el voltaje Nodal V_N son representadas como sigue:

$$AX = b$$

Siendo A la Matriz de planta, X el vector de incógnitas y b el vector independiente.

$$\text{Solución del sistema anterior: } X = [A]^{-1}b$$

Algunos de los métodos de solución conocidos para invertir la matriz A son los siguientes:

- Método convencional $\frac{Adj A}{|A|}$
- Método de Gauss - Jordan $[A|b] \Rightarrow [A^{-1}A|A^{-1}b] = [I|X]$
- Método de eliminación Gaussiana
- Método de Tinney - Walker ó LDU

- Método de descomposición de Cholesky

Otro método con el cual se pueden resolver ecuaciones lineales es el de Gauss-Seidel, pero por tratarse de un método iterativo, tendrá que asignarse una condición inicial a las variables de estado, esta característica lo hace diferente respecto a los métodos mencionados anteriormente, llamados de métodos directos y en los cuales no se requiere de la condición inicial ya que el resultado se obtiene de forma directa, invirtiendo la matriz de planta, multiplicada por el vector independiente.

4.3 Solución de Ecuaciones Algebraicas no Lineales

En sistemas de potencia algunos estados se pueden representar por medio de ecuaciones algebraicas no Lineales, tal es el caso del estado estacionario que es representado a través de n ecuaciones algebraicas no Lineales de segundo orden y donde n es el número de nodos.

El modelo planteado es como sigue:

$$\begin{array}{rcl} F_1(X_1, \dots, X_n) & = & Y_1 \\ \vdots & & \vdots \\ F_n(X_1, \dots, X_n) & = & Y_n \end{array}$$

El mismo representado en forma simplificada es el siguiente:

$$\overline{F(X)} = \overline{Y}$$

Donde: F(X): Función Vectorial y Y: Vector independiente

Las principales características de las funciones no lineales son las siguientes:

- Soluciones múltiples
- La búsqueda de la solución no es directa
- Se tendrá que recurrir a procesos iterativos. (La solución final de los procesos iterativos depende del estado inicial, así el sistema converge si se está cerca a la solución, caso contrario diverge).

Métodos empleados en la solución de ecuaciones algebraicas no lineales

- Gauss y Gauss Seidel
- Newton Raphson
- La no linealidad

4.3.1 Método Iterativo de Gauss

Considere que $F(X) = 0$ una función no lineal. Se despeja de esta la variable x y se rescribe así: $X = g(X)$

Algoritmo de solución:

1. $k = 0$
2. Estimar valor inicial X^k
3. Calcular $X^{k+1} = g(X)^k$
4. $\text{Max } |X^{k+1} - X_k| < \xi \Rightarrow \text{Convergencia}$
5. Caso contrario $\Rightarrow k = k + 1$ y regresar a 3.

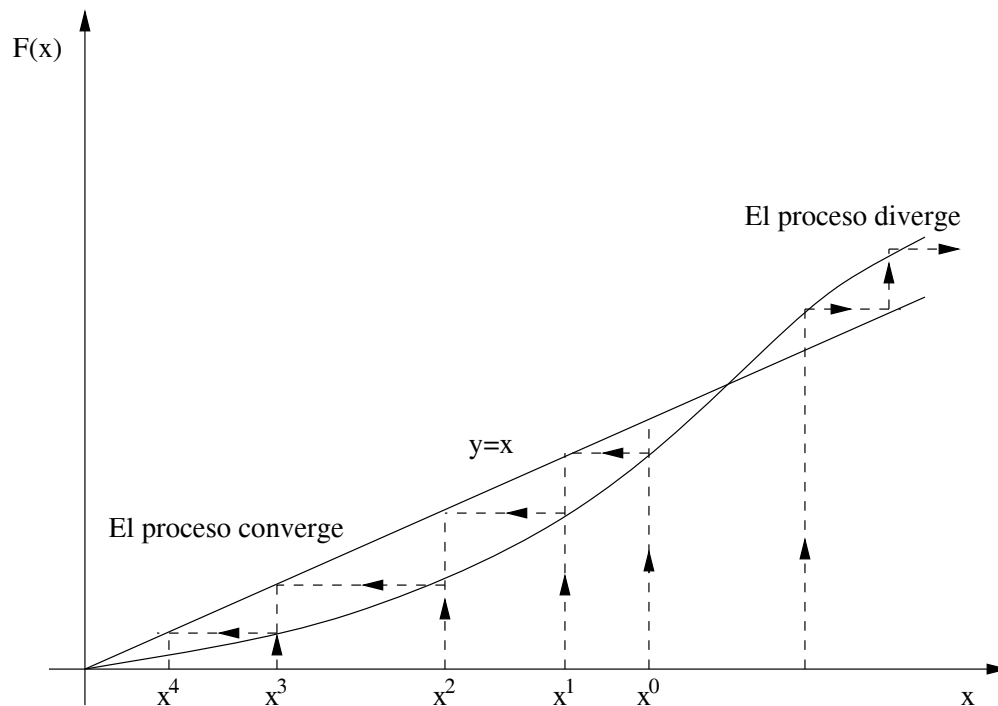


Figura 4.1: Proceso de convergencia del método Gauss

Descripción del proceso iterativo para un sistema con n ecuaciones y n incógnitas. Se plantean las ecuaciones y se despeja de cada una de estas una variable de estado así:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= g_1(X_1, \dots, X_n) \\
 X_2 &= g_2(X_2, \dots, X_n) \\
 &\vdots \\
 X_n &= g_n(X_1, \dots, X_n)
 \end{aligned}$$

Algoritmo de solución:

1. $k = 0$
2. Estimar valores iniciales: $X = X_1^k, X_2^k, \dots, X_n^k$
3. Actualizar las variables de estado

$$\begin{aligned} X_1^{k+1} &= g_1(X_1^k, X_2^k, \dots, X_n^k) \\ X_2^{k+1} &= g_2(X_1^k, X_2^k, \dots, X_n^k) \\ &\vdots \\ X_n^{k+1} &= g_n(X_1^k, X_2^k, \dots, X_n^k) \end{aligned}$$

4. Criterio de convergencia max. $|X_i^{k+1} - X_i^k| < \xi \quad \forall_i \Rightarrow$ Convergencia
5. Caso contrario $\Rightarrow k = k + 1$ y regresa a 3.

4.3.2 Método iterativo de Gauss - Seidel

El proceso iterativo es el mismo respecto al método de Gauss, la diferencia radica en la manera como se plantean las ecuaciones en 3 como se describe a seguir:

$$\begin{aligned} X_1^{k+1} &= g_1(X_1^k, X_2^k, \dots, X_n^k) \\ X_2^{k+1} &= g_2(X_1^{k+1}, X_2^k, \dots, X_n^k) \\ &\vdots \\ X_n^{k+1} &= g_n(X_1^{k+1}, X_2^{k+1}, \dots, X_n^k) \end{aligned}$$

4.3.3 Método de Newton Raphson

Características principales:

- Aplicable a problemas unidimensionales y multidimensionales
- Soluciona ecuaciones no lineales
- Linealiza las ecuaciones alrededor de un punto

Sistema unidimensional

$F(x) = 0$ Función no lineal (una ecuación con una incógnita). La solución del problema consiste en determinar un valor de x para el cual la función cumple la condición de igualdad, esto es $F(x) = 0$

El problema es resuelto linealizando la función alrededor de un punto e iterando al rededor del mismo. La linealización de la función anterior se explica a través de la expansión en serie de Taylor así:

$$F(X_o + \Delta X_o) = F(X_o) + F'(X_o)(\Delta X_o) + F''(X_o) \frac{\Delta X_o^2}{2!} + \dots$$

Se desprecian los terminos con potencias superiores a 2, quedando entonces la siguiente expresi3n:

$$F(X_o + \Delta X_o) = F(X_o) + F'(X_o)(\Delta X_o) = 0$$

Al despejar terminos se obtiene:

$$-F(X_o) = F'(X_o)(\Delta X_o) \Rightarrow \Delta X_o = -F(X_o)/F'(X_o)$$

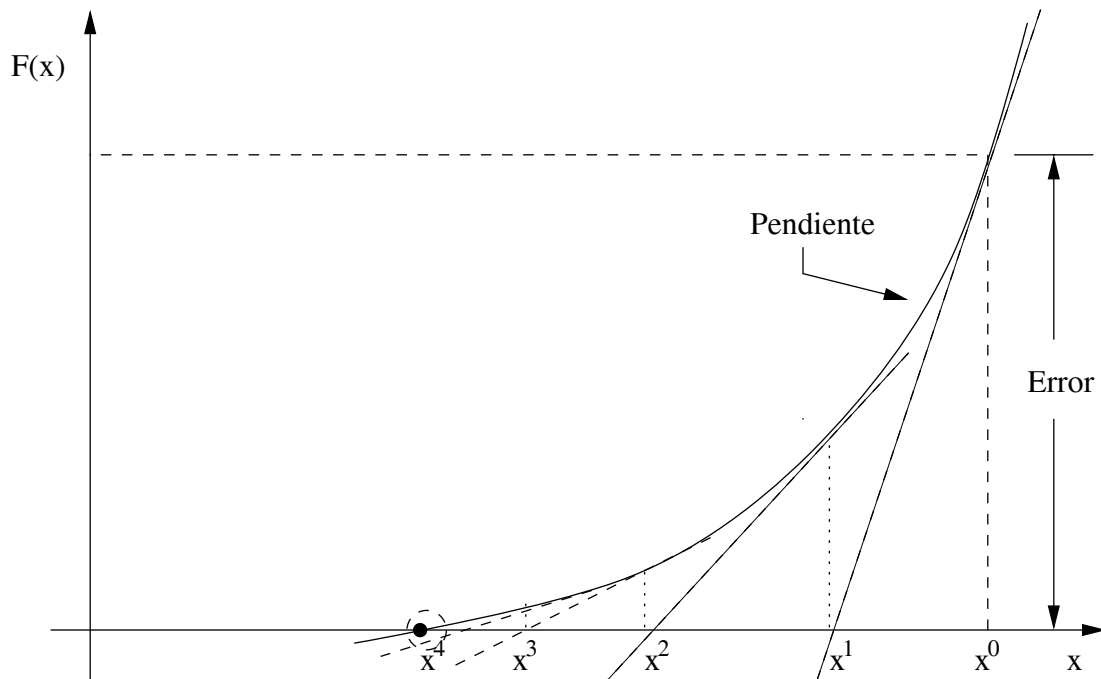


Figura 4.2: Proceso de convergencia del método Newton Raphson

Algoritmo de soluci3n del método de Newton Raphson

1. $v = 0$
2. Calcular $g(X)$ en el punto $X = X^V$
3. Comparar $g(X)$ con el valor especificado ξ : Si $|g(X^V)| \leq \xi \Rightarrow X = X^V$ (Soluci3n al problema)
4. Linealizar la funci3n $g(X)$ en torno del punto $(X^V, g(X^V))$ por intermedio de la serie de Taylor.

$$g(X^V + \Delta X^V) \approx g(X^V) + g'(X^V)\Delta X^V$$

Siendo: $g'(X) = dg/dX$

Este paso se resume al cálculo de la derivada $g'(X^V)$

5. Resolver el problema linealizado, o sea encontrar ΔX tal que:

$$g(X^V) + g'(X^V)\Delta X^V = 0$$

Esto significa que la nueva estimación de X pasa a ser:

$$X^{V+1} = X^V + \Delta X^V$$

Siendo $\Delta X^V = -g(X^V)/g'(X^V)$

6. $v = v + 1$, regresar a 2.

La variante al método es obtenida considerando constante la derivada durante todo el proceso.

Sistema n dimensional

El modelo matemático planteado es de la forma:

$$\bar{g}(\bar{X}) = 0$$

Donde: $g(X) \Rightarrow$ función vectorial ($n.1$) y $X \Rightarrow$ Vector de las incógnitas ($x.1$)

La función vectorial y el vector de incógnitas es escrito como sigue:

$$\begin{aligned}\bar{g}(\bar{X}) &= [g_1(\bar{X}), g_2(\bar{X}), \dots, g_n(\bar{X})]^T \\ (\bar{X}) &= [X_1, X_2, \dots, X_n]^T\end{aligned}$$

La solución sigue basicamente los mismos pasos del algoritmo unidimensional, la principal diferencia consiste en la aparición de la matriz Jacobiana.

- Linealización de la función vectorial $\bar{g}(\bar{X})$ para $X = X^V$

La linealización es dada por los primeros términos de la serie de Taylor así:

$$\bar{g}(\bar{X}^V + \Delta(\bar{X}^V)) \approx \bar{g}(\bar{X}^V) + J(\bar{X}^V)\Delta\bar{X}^V$$

Siendo la matriz Jacobiana $J = \frac{\partial g}{\partial X}$

$$J = \frac{\partial g}{\partial X} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \frac{\partial g_1}{\partial X_1} & \frac{\partial g_1}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial X_n} \\ \hline \frac{\partial g_2}{\partial X_1} & \frac{\partial g_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial X_n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \frac{\partial g_n}{\partial X_1} & \frac{\partial g_n}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial X_n} \\ \hline \end{array}$$

El vector de Corrección ΔX es calculado como:

$$\bar{g}(\bar{X}^V) + J(\bar{X}^V)\Delta\bar{X}^V = 0$$

Que es la manera Linealizada de resolver el problema

$$\bar{g}(\bar{X}^V + \Delta\bar{X}^V) = 0$$

Ejemplo: Se plantea un sistema de ecuaciones no lineales de segundo orden con dos incógnitas, linealizado en el punto (X_1^V, X_2^V) .

$$g_1(X_1, X_2) \approx g_1(X_1^V, X_2^V) + \frac{\partial g_1}{\partial X_1}\Delta X_1^V + \frac{\partial g_1}{\partial X_2}\Delta X_2^V$$

$$g_2(X_1, X_2) \approx g_2(X_1^V, X_2^V) + \frac{\partial g_2}{\partial X_1}\Delta X_1^V + \frac{\partial g_2}{\partial X_2}\Delta X_2^V$$

Algoritmo para solucionar el sistema de ecuaciones $\underline{g}(\underline{X}) = 0$ por Newton.

- i) $v = 0$ y seleccionar condiciones iniciales $(\bar{X} = \bar{X}^V = \bar{X}^O)$
- ii) Calcular $\bar{g}(\bar{X}^V)$
- iii) Probar convergencia: si $|g_i(\bar{X}^V)| \leq \xi$; Para $i = 1, \dots, n.$, el proceso converge $\Rightarrow X = X^V$; caso contrario ir a iv.
- iv) Calcular la matriz Jacobiana $J(\bar{X}^V)$
- v) Determinar nueva solución $\bar{X}^{V+1}$

$$\bar{X}^{V+1} = \bar{X}^{V+1} = \bar{X}^V + \Delta\bar{X}^V$$

$$\Delta X^V = -[J(X^V)]^{-1}\bar{g}(\bar{X}^V)$$

- vi) Actualizar $v + 1 \Rightarrow v$ y regresar al paso ii

Ejercicio: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones no Lineales de segundo orden empleando los métodos de Newton, Gauss y Gauss-Seidel y analizar los resultados.

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 1 &= 0 \\ 2x_1x_2 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

CAPÍTULO 5

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE FLUJO DE POTENCIA

5.1 Definición del problema

Si en un sistema de potencia se especifican los valores de carga nodal, se conocen los parámetros de la red y además se conocen dos de sus cuatro variables características (V, θ, P, Q), es posible determinar el estado de equilibrio nodal y global del sistema. Esta tarea se denomina flujo de potencia.

Los elementos de la red de transmisión son diseñados para condiciones de operación en equilibrio, además la operación de los mismos es efectuada de manera balanceada debido a que la carga nodal es equilibrada, por lo tanto, el flujo de potencia a través de los elementos presenta condiciones de balanceo, esto es, no existe circulación de corriente por neutro ni tierra, en estas condiciones, si la red trifásica es descompuesta en tres redes de secuencia, denominadas de secuencia positiva, negativa y cero, solo la red de secuencia positiva tiene efecto en la operación.

Por lo anterior, al efectuar análisis en estado estacionario en redes de alta potencia, la red se modela por su equivalente monofásico de secuencia positiva.

Los estudios de Flujos de Potencia se aplican en:

- Planeación y diseño del Sistema Eléctrico.
- Determinación de las condiciones operativas. El flujo de Potencia proporciona información de suma importancia acerca de la operación de las redes eléctricas como es: Voltajes nodales, flujos de potencia por las líneas, pérdidas, etc.

Las matrices de redes empleadas en los diferentes estudios de sistemas eléctricos son:

- La matriz admitancia de barra Y_{bus}
- La matriz impedancia de barra Z_{bus}

Los métodos clásicos más comúnmente empleados de flujo de carga son desarrollados con base en la matriz Y_{bus} . Los de corto circuito están basados en la matriz Z_{bus} .

Los elementos de la matriz Y_{bus} son descritos de la siguiente manera:

$$Y_{iJ} = |Y_{iJ}| \angle \theta_{iJ} = |Y_{iJ}| \cos \theta_{iJ} + j |Y_{iJ}| \sin \theta_{iJ}$$

$$Y_{iJ} = G_{iJ} + jB_{iJ}$$

El modelo matemático del sistema para resolver el problema de flujo de carga se expresa en función de voltajes nodales, los cuales podrán ser dados en componentes polares o rectangulares, siendo la más usada en los escritos técnicos la representación polar.

$$V_i = |V_i| \angle \delta_i = |V_i| (\cos \delta_i + j \sin \delta_i)$$

La ecuación que relaciona la corriente inyectada en el nodo en función de voltajes nodales y la matriz Y_{bus} es la siguiente:

$$I_i = Y_{i1}V_1 + Y_{i2}V_2 + \dots + Y_{in}V_n = \sum_{n=1}^n Y_{in}V_n$$

Sean P_i y Q_i las potencias real y reactiva especificadas en el nodo i . La ecuación que relaciona estas variables con el voltaje nodal y la matriz Y_{bus} es:

$$P_i - jQ_i = V_i^* \sum_{n=1}^n Y_{in}V_n$$

Expresado en forma polar es:

$$P_i - jQ_i = \sum_{n=1}^n |Y_{in}V_nV_i| \angle \theta_{in} + \delta_n - \delta_i$$

El error de potencia en el nodo (i) se calcula como la diferencia entre la potencia inyectada por el sistema externo e interno, esta diferencia se presenta en el proceso del flujo de carga en el cual la potencia del sistema externo es establecida en un valor, la del sistema interno se calcula con base en los voltajes nodales y parámetros de la red, así que solo hasta cuando se alcance el voltaje de equilibrio- las dos potencias coinciden y el error de potencia será menor que un valor establecido, calculado así:

$$\Delta P_i = (P_{Gi} - P_{Di}) - P_{i \text{ calc}} = P_{i \text{ prog}} - P_{i \text{ calc}}$$

$$\Delta Q_i = (Q_{Gi} - Q_{Di}) - Q_{i \text{ calc}} = Q_{i \text{ prog}} - Q_{i \text{ calc}}$$

Si no existe generación o carga sus términos correspondientes equivalen a cero.

ΔP_i y ΔQ_i : Errores que ocurren durante el desarrollo del flujo de potencia. Cuando la potencia programada y la calculada se aproximan entonces: $|\Delta P_i| \leq \xi$ y $|\Delta Q_i| \leq \xi$

Las ecuaciones de potencia activa y reactiva inyectada pueden ser expresadas en diferente forma:

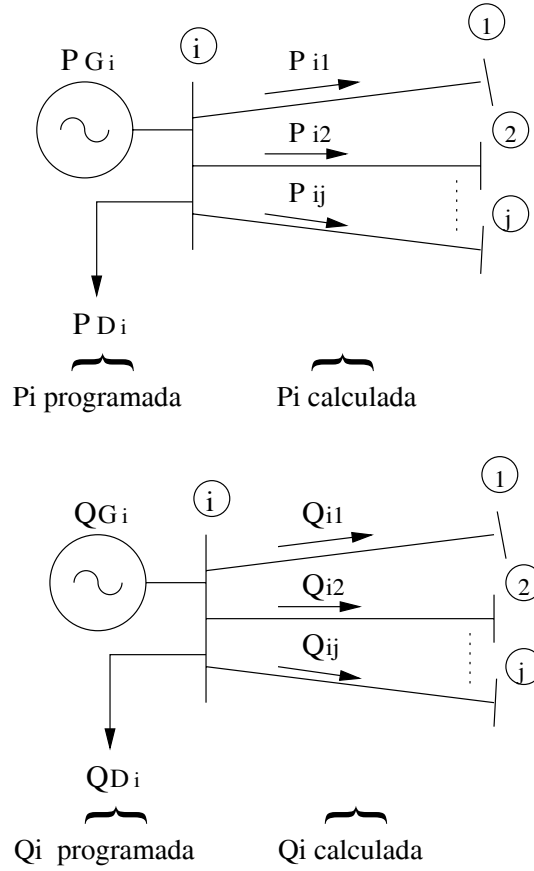


Figura 5.1: Potencia activa y reactiva inyectada

1. Primera

$$P_k + JQ_k = V_k \sum_{m=1}^n Y_{km}^* V_m^*$$

$$P_k + JQ_k = (e_k + Jf_k) \sum_{m=1}^n (G_{km} - JB_{km})(e_m - Jf_m)$$

$$P_k + JQ_k = \sum_{m=1}^n (e_k + Jf_k)(e_m G_{km} - f_m B_{km} - Jf_m G_{km} - Je_m B_{km})$$

$$P_k = \sum_{m=1}^n e_k e_m G_{km} - e_k f_m B_{km} + f_k e_m B_{km} + f_k f_m G_{km}$$

$$Q_k = \sum_{m=1}^n f_k e_m G_{km} - f_k f_m B_{km} - e_k e_m B_{km} - e_k f_m G_{km}$$

2. Segunda

$$\begin{aligned}
P_k + JQ_k &= V_k \sum_{m=1}^n Y_{km}^* V_m^* \\
P_k + JQ_k &= \sum_{m=1}^n V_k e^{J\theta_k} Y_{km} e^{-J\varphi_{km}} V_m e^{-J\theta_m} \\
P_k + JQ_k &= \sum_{m=1}^n |V_k Y_{km} V_m| \angle \theta_k - \theta_m - \varphi_{km} \\
P_k &= \sum_{m=1}^n |V_k Y_{km} V_m| \cos(\theta_k - \theta_m - \varphi_{km}) \\
Q_k &= \sum_{m=1}^n |V_k Y_{km} V_m| \sin(\theta_k - \theta_m - \varphi_{km})
\end{aligned}$$

3. Tercera

$$\begin{aligned}
P_k + JQ_k &= V_k \sum_{m=1}^n Y_{km}^* V_m^* \\
P_k + JQ_k &= \sum_{m=1}^n V_k e^{J\theta_k} Y_{km} e^{-J\varphi_{km}} V_m e^{-J\theta_m} \\
P_k + JQ_k &= \sum_{m=1}^n V_k V_m (\cos\theta_{km} + J\sin\theta_{km})(G_{km} - JB_{km}) \\
P_k &= V_k \sum_{m=1}^n V_m (G_{km} \cos\theta_{km} + B_{km} \sin\theta_{km}) \\
Q_k &= V_k \sum_{m=1}^n V_m (G_{km} \sin\theta_{km} - B_{km} \cos\theta_{km})
\end{aligned}$$

5.2 Tareas básicas en la formulación

Se definen dos tareas básicas en la formulación del problema de flujo e carga, la primera se refiere al planteamiento de modelo matemático y la segunda a la selección del método para la solución de dicho modelo.

En la formulación del modelo matemático las ecuaciones nodales se plantean en función de las cuatro variables nodales y los parámetros del sistema. Estas ecuaciones siguen la siguiente estructura:

$$F(P_{Ni}, Q_{Ni}, |Vi|, \theta_i) = 0$$

Por cada nodo son expresadas dos ecuaciones como se presenta a seguir:

$$P_i = \sum_{n=1}^N |Y_{in} V_i V_n| \cos(\delta_i - \delta_n - \theta_{in})$$

$$Q_i = - \sum_{n=1}^N |Y_{in} V_i V_n| \text{Sen}(\delta_i - \delta_n - \theta_{in})$$

El modelo a solucionar es escrito de la siguiente forma:

$$\Delta P_i = (P_i^{\text{Especificado}} - P_i^{\text{Calculado}}) = 0; \quad \Delta Q_i = (Q_i^{\text{Especificado}} - Q_i^{\text{Calculado}}) = 0$$

En la selección del método numérico se deberá tener en cuenta el tipo de modelo a resolver (lineal o no lineal), el tipo de aplicación que se desee resolver, entre las que se cuentan (operación, planeación, diseño), la calidad de respuesta esperada y los requerimientos de memoria.

5.3 Reseña histórica

. Ecuaciones que describen las relaciones nodales son:

$$I_N = Y_N * V_N$$

$$V_N = Z_N * I_N$$

Para resolver este sistema de ecuaciones es necesario utilizar el computador, sin embargo este solo se aplica a partir de la década de los 60.

Inicialmente para estudiar las redes eléctricas fue empleado el analizador de redes, con este se reproducía la red a pequeña escala en el laboratorio, la restricción es que solo era posible reproducir sistemas pequeños.

El desarrollo del computador permite que las ecuaciones de red y sus métodos de solución, adquieran gran importancia.

- Inicialmente fueron desarrollados los métodos directos: $I_N = Y_N * V_N$

Problemas: Lento y en muchos casos no convergen

- Luego apareció: $V_N = Z_N * I_N$

Con este se mejoró la convergencia.

Problemas: Exigencia de memoria y lento

- Posteriormente se desenvuelve el Gauss.

Requiere poca memoria.

Problemas: Lento y diverge fácilmente por malos condicionamientos.

- Más adelante aparece el método Newton-Raphson, mostrando poderosas propiedades de convergencia, pero con excesivos requerimientos de memoria, haciéndolo no competitivo en ese momento, debido al manejo de matrices de gran tamaño con computadores lentos y de poca capacidad.

Tinney y Walker presentaron la solución a dicho problema, con la aplicación de las matrices dispersas, al estudio de las redes eléctricas.

- Posteriormente aparece el flujo de carga desacoplado, desarrollado por B. Stott, mejorando en rapidéz y requerimiento de memoria. Más adelante aparece el flujo de carga linealizado y el fcdc

5.4 Métodos de solución

Los más estudiados por los especialistas del tema son:

$$\begin{aligned}
 &\text{Iterativos (Lineales y no lineales) } \left\{ \begin{array}{l} Gauss \\ Guss - Seidel \end{array} \right. \\
 &\text{No-Lineales (Linealizados) } \left\{ \begin{array}{ll} Acoplado : & .\text{Método de Newton Raphson} \\ Desacoplados : & .\text{Desacoplado de Newton} \\ & .\text{Desacoplado rápido de Newton} \\ & .\text{Ward y Hale} \end{array} \right. \\
 &\text{No-Lineales } \left\{ \begin{array}{ll} Acoplados : & .\text{Método de la No linealidad de segundo orden} \\ Desacoplados : & .\text{Método de la No linealidad de segundo orden desacoplado} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

5.5 Condiciones y Definición del problema

El sistema se estudia en condiciones estacionarias. La red opera de manera balanceada.

Cantidades o variables asociadas a cada nodo

$$\left. \begin{array}{l} P_G, \quad Q_G \\ P_D, \quad Q_D \\ |V|, \quad \theta \end{array} \right\} \text{ Variables nodales}$$

De las seis variables nodales mencionadas anteriormente, dos son conocidas, estas son la demanda de potencia activa y reactiva: P_D y Q_D

Así las ecuaciones nodales se plantean en función de las siguientes cuatro variables nodales

$$\left. \begin{array}{l} P_G, \quad Q_G \\ |V|, \quad \theta \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\text{Potencia inyectada } (S_G - S_D) \\ .\text{activa} \\ .\text{reactiva} \\ -\text{Voltaje} \\ .\text{magnitud} \\ .\text{ángulo} \end{array}$$

5.6 Clasificación de las variables

- Variables incontrolables: P_D y Q_D
- Variables de control: P_G y Q_G
- Variables de estado: $|V|$ y θ

5.7 Límites prácticos de las variables

- De estado

$$- |V_i|_{min} \leq |V_i| \leq |V_i|_{max}$$

Límite mínimo por estabilidad y el máximo por aislamiento.

$$- \text{Capacidad de transmisión } |\theta_i - \theta_j| \leq \max |\theta_i - \theta_j|$$

- De control

$$P_{Gmin} \leq P_{G_i} \leq P_{Gmax}; Q_{Gmin} \leq Q_{G_i} \leq Q_{Gmax}$$

5.8 Tipos de Nodos (Clasificación de los Nodos)

- Nodo Flotante, Slack, de holgura o de referencia (V, θ)

Éste nodo es el encargado de establecer el balance global del sistema, es decir, asume los sobrantes (faltantes) de carga de los otros nodos, más las pérdidas del sistema. Es planteado de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^n P_G - \sum_{i=1}^n P_D = P_{\text{pérdidas}}$$

Generalmente se selecciona el nodo de mayor generación. Este nodo generador deberá tener la suficiente cantidad de reactivos para el control de la magnitud del voltaje.

Se supone conocida la potencia generada en todos los nodos generadores, excepto en el nodo denominado slack, que corresponde al nodo generador de mayor capacidad; además las demandas son conocidas.

$$\text{Potencia generada conocida } P_{k_G} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \text{slack}}}^n P_G$$

$$\text{Potencia demandada } P_{k_D} = \sum_{i=1}^n P_D$$

Al reescribir las ecuaciones anteriores, el balance global del sistema cumple con la siguiente ecuación:

$$P_{G_{\text{slack}}} + P_{k_G} - P_{k_D} = P_{\text{pérdidas}}$$

De la ecuación anterior, el nodo slack debe generar una potencia para garantizar el balance global del sistema:

$$P_{G_{\text{slack}}} = -P_{k_G} + P_{k_D} + P_{\text{pérdidas}}$$

Por lo tanto la potencia generada en el nodo slack deberá ser la suficiente para cubrir la diferencia entre $(-P_{k_G} + P_{k_D})$ más el valor de las pérdidas. Las pérdidas son una variable no conocidas, por lo tanto, la variable $P_{G_{\text{slack}}}$ tendrá que ser libre para que se pueda cumplir la ecuación anterior.

Al ser la magnitud de voltaje una variable especificada, el $Q_{G_{\text{slack}}}$ sera una variable libre (no especificada). El nodo slack entonces se encargara de establecer el balance global del sistema, tanto en potencia activa como en potencia reactiva, cubriendo los faltantes (sobrantes) que presente el sistema.

En este nodo las variable son clasificadas así:

$|V|, \theta \Rightarrow$ Variables especificadas

$P, Q \Rightarrow$ Variables desconocidas.

El ángulo θ se asume a 0° y será referencia para los demás nodos del sistema.

- Nodo de Voltaje controlado (PV).

Generalmente se asumen los nodos con generación representativa.

Las variable son clasificadas así:

$P, V \Rightarrow$ Variables especificadas

$Q, \theta \Rightarrow$ Variables desconocidas

El límite de reactivos podrá ser considerado, dependiendo de la aplicación.

$$Q_{\text{imin}} \leq Q_i \leq Q_{\text{imax}}$$

A este tipo de barra pertenecen aquellos nodos que tengan elementos con capacidad para controlar la magnitud del voltaje.

Barras candidatas a ser denominadas de voltaje controlado:

- Generadores
- Compensadores sincrónicos
- Compensadores estáticos activos (controlados por tiristores)
- Transformadores con combinadores automáticos de Taps bajo carga, siempre y cuando su operación esté en el rango de control.

- Nodo de Carga (P,Q)

Corresponde a los nodos de carga o nodos donde la generación es muy pequeña. Esto es, representa las barras donde la carga predomina sobre la generación. Ejemplo al mismo barraje se conecta carga y generación, siendo este último poco representativo frente a la magnitud de la carga. También representa las barras de paso.

Las variables son clasificadas así:

$P, Q \Rightarrow$ Variables especificadas

$V, \theta \Rightarrow$ Variables desconocidas

Una forma alternativa de definir el nodo de carga considerando restricción de voltaje es la siguiente:

Barras de carga (P-Q) donde la magnitud de voltaje se requiere que esté dentro de unos límites prefijados: $V_{min} \leq V \leq V_{max}$. Este tipo de barra permite establecer la cantidad de potencia reactiva que se necesita inyectar en la red a fin de mantener una operación adecuada.

En el problema de flujo de potencia este tipo de nodo es operado de la siguiente manera: Cuando uno de los límites de voltaje barra es sobrepasado, el nodo cambia de tipo a ser (P - V), Q queda entonces como una incógnita. Resuelto el flujo se calcula la diferencia ($Q_{especificado} - Q_{calculado}$), que indica la cantidad de reactivos (L-C) que deberán ser instalados.

5.9 Método de Gauss y Gauss Seidel utilizado en el problema de Flujo de Potencia

Tuvieron gran acogida en los años 60 por su facilidad en la implementación (mínimos requerimientos de memoria y facilidad en su programación).

Ecuaciones planteadas:

$$P_k - JQ_k = V_k^* \sum_{m=1}^n Y_{km} V_m$$

$$P_k - JQ_k = V_k^* Y_{kk} V_k + V_k^* \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n Y_{km} V_m$$

$$\frac{P_k - JQ_k}{V_k^*} = Y_{kk} V_k + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n Y_{km} V_m$$

De la ecuación anterior, se despeja el voltaje del nodo k:

$$V_k = \frac{1}{Y_{kk}} \left[\frac{P_k - JQ_k}{V_k^*} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n Y_{km} V_m \right]$$

Además en los nodos tipo voltaje controlado se calcula:

$$Q_k = -I_{mag} \left\{ V_k^* \sum_{m=1}^n Y_{km} V_m \right\}; \text{Siendo } (Q_k = Q_{Gk} - Q_{Dk})$$

$$Q_k = V_k \sum_{m=1}^n V_m (G_{km} \text{Sen} \theta_{km} - B_{km} \text{Cos} \theta_{km})$$

En estos nodos se deberá satisfacer que:

$$Q_{Gk \min} \leq Q_{Gk} \leq Q_{Gk \max}$$

El criterio de parada:

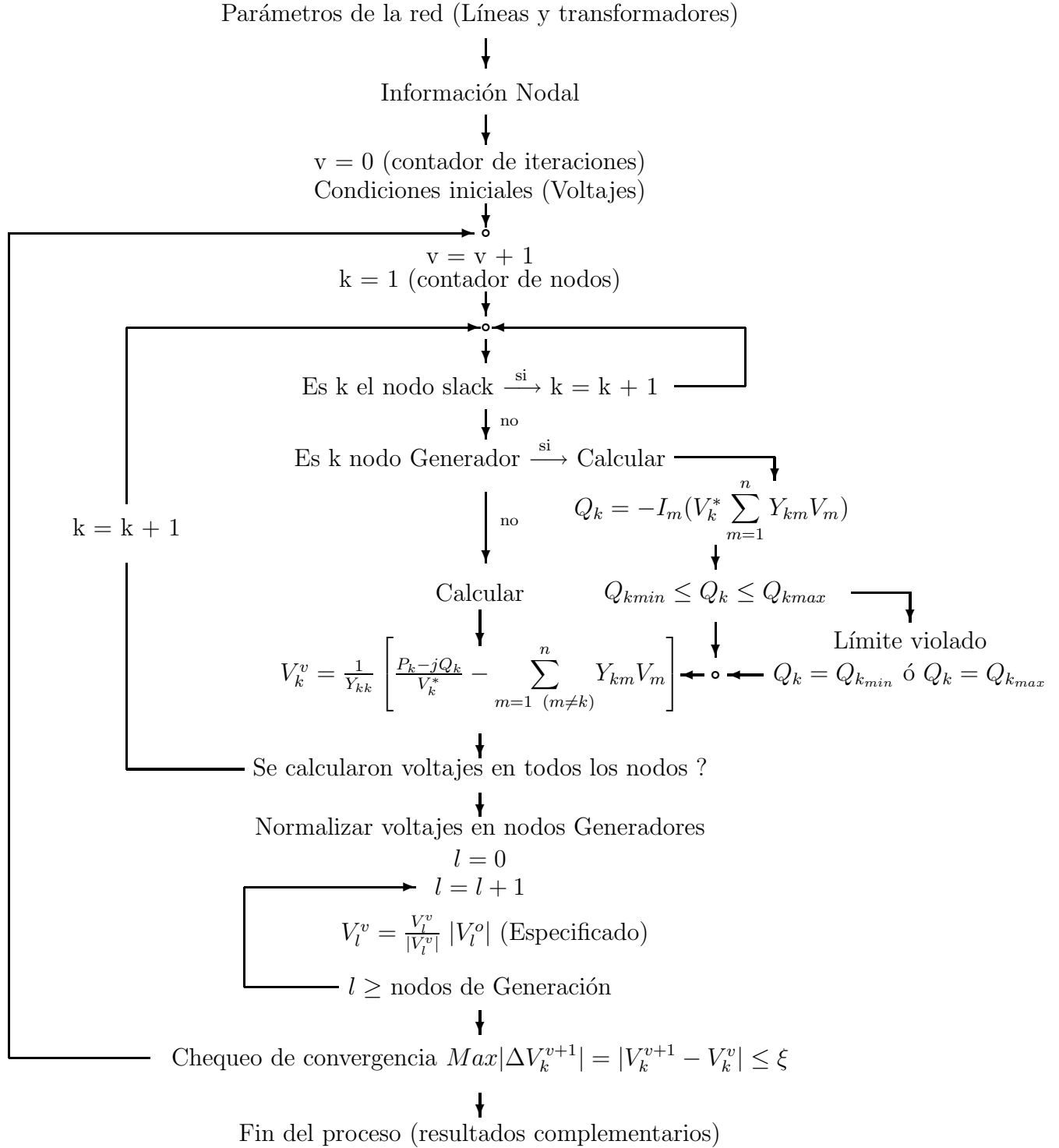
$$\max. |v_i^{k+1} - v_i^k| \leq \xi \Rightarrow \text{Pare}$$

Por facilidad se acostumbra suponer el vector de voltajes iniciales en los nodos del sistema de la siguiente manera:

- En barra (P-Q): $1\angle 0^\circ$
- En barra (P-V): $|V_{especificado}| \angle 0^\circ$
- En barra (V- θ): $|V_{slack}| \angle 0^\circ$

En la barra de referencia se conoce la magnitud y el ángulo del voltaje, por lo tanto se tienen n-1 incógnitas, así que en el cálculo de los voltajes nodales no se tendrá en cuenta la ecuación de este nodo.

ALGORITMO DE GAUSS SEIDEL



Ejercicio: Dado el siguiente sistema de energía eléctrica de 3 nodos, determinar los valores de voltajes nodales, flujos de potencia por las líneas y pérdidas. Emplear para su solución el método de Gauss.

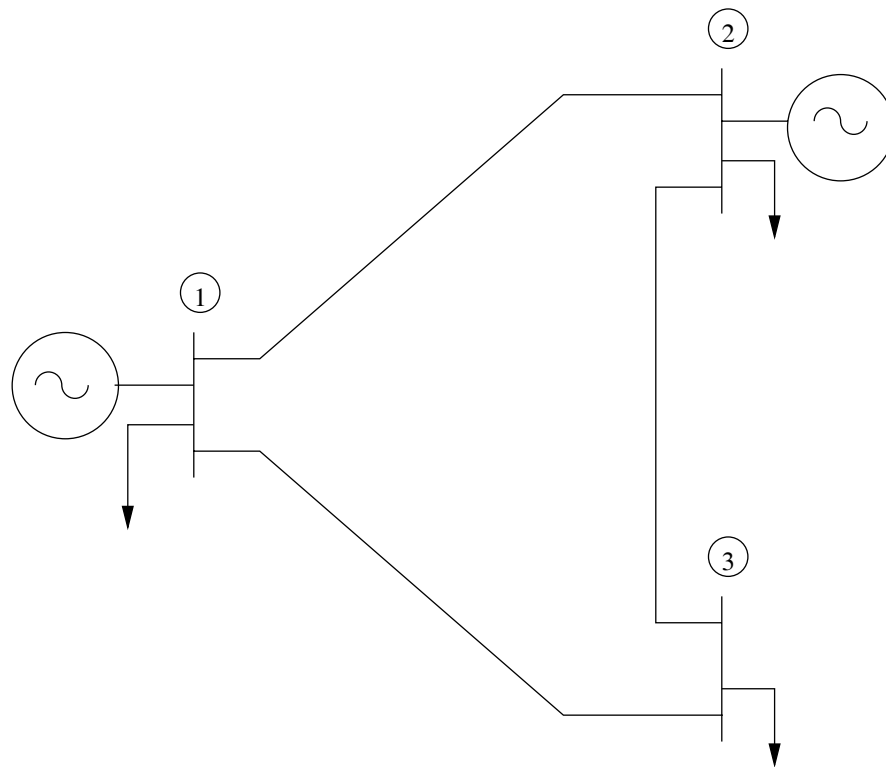


Figura 5.2: Red eléctrica de 3 nodos

Línea	$R_{p.u.}$	$X_{p.u.}$	$Y/2_{p.u.}$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} P_{base} = 100 \text{ MVA}$
1 – 2	0.01	0.06	0.005	
1 – 3	0.03	0.20	0.01	
2 – 3	0.04	0.25	0.015	

Datos nodales

$Nodo$	P_G (MW)	Q_G (MVAR)	P_D (MW)	Q_D (MVAR)	$Voltaje$ (p.u.)
1	150	80	60	30	1.02
2	30	15	20	10	1.01
3	—	—	45	15	—

Voltaje nominal del sistema: 115 KV

5.10 Método de Newton Raphson en la solución del problema de Flujo de Potencia

El método de Newton Raphson es del tipo iterativo que linealiza las funciones en el punto de trabajo. Método recomendado en la solución de ecuaciones algebraicas no lineales, como es el caso de las ecuaciones nodales de potencia inyectada que describen las redes eléctricas en estado estacionario.

5.10.1 Modelo matemático

Las ecuaciones nodales describen el comportamiento del sistema en estado estacionario. En cada nodo se plantea una ecuación como se describe a seguir:

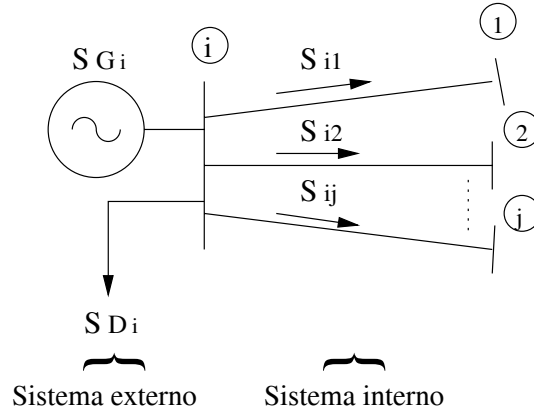


Figura 5.3: Planteamiento de la ecuación de potencia nodal inyectada

$$S_{Ni} = P_{Ni} + jQ_{Ni} = S_{Gi} - S_{Di} \text{ (Sistema externo)}$$

$$S_{Ni} = V_i \sum_{m=1}^n Y_{im}^* V_m^* \text{ (Sistema interno)}$$

En estado estacionario la potencia inyectada por el sistema externo debera ser igual a la inyectada por el sistema interno, se debe cumplir entonces que:

$$S_{Ni} = V_i e^{j\theta_i} \sum_{m=1}^n Y_{im} e^{-j\varphi_{im}} V_m e^{-j\theta_m} \text{ (Formula que establece el balance nodal)}$$

Con base en el tipo de nodo, las ecuaciones son planteadas como ecuaciones del subsistema 1 y subsistema 2. Las ecuaciones del subsistema 1 establecen el modelo matemático del problema de flujo de carga y son escritas como sigue:

$$\Delta P_i = P_i^{\text{esp}} - P_i^{\text{cal}} = (P_{Gi} - P_{Di}) - V_i \sum_{m=1}^n V_m (G_{im} \cos \theta_{im} + B_{im} \sin \theta_{im}) = 0$$

$$\Delta Q_i = Q_i^{\text{esp}} - Q_i^{\text{cal}} = (Q_{G_i} - Q_{D_i}) - V_i \sum_{m=1}^n V_m (G_{im} \text{Sen} \theta_{im} - B_{im} \text{Cos} \theta_{im}) = 0$$

5.10.2 Método de solución de Newton

Este método se basa en la expansión en series de Taylor y es descrito así:

$$F(X^k + \Delta X^k) = F(X^k) + F'(X^k) \Delta X^k + \dots = 0$$

Se desprecian potencias superiores a 1 y se despeja el k-ésimo incremento de la variable de estado X.

$$\Delta X^k = - [F'(X^k)]^{-1} F(X^k)$$

$$X^{k+1} = X^k + \Delta X^k$$

Si se tiene un modelo de n ecuaciones con n incógnitas, el problema linealizado toma la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} F_1(\bar{x}) \\ F_2(\bar{x}) \\ \vdots \\ F_n(\bar{x}) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\delta F_1}{\delta X_1} & \frac{\delta F_1}{\delta X_2} & \dots & \frac{\delta F_1}{\delta X_n} \\ \frac{\delta F_2}{\delta X_1} & \frac{\delta F_2}{\delta X_2} & \dots & \frac{\delta F_2}{\delta X_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\delta F_n}{\delta X_1} & \frac{\delta F_n}{\delta X_2} & \dots & \frac{\delta F_n}{\delta X_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \\ \vdots \\ \Delta X_n \end{bmatrix}$$

La notación del conjunto de ecuaciones anteriores es: $\overline{F(x)} = [J] \overline{\Delta X}$

Observaciones a la ecuación de potencia nodal: $P_i + JQ_i = V_i \sum_{k=1}^n Y_{ik}^* V_k^*$

- Las potencias netas inyectadas dependen de su propia tensión, así como también de las tensiones de los otros nodos con los cuales dicho nodo está interconectado y de los parámetros de la red.
- Si los nodos i y k no están interconectados no aparece término Y_{ik} en la matriz Y_{bus} por lo tanto el término $(i - k)$ no incide en la sumatoria de la potencia nodal.
- En los sistemas de transmisión $R \ll X$, además la diferencia angular es pequeña.
- Las ecuaciones son sinusoidales y de segundo orden.

Estructura de la matriz Jacobiana:

Dado el siguiente sistema de tres nodos, escribir el modelo matemático linealizado del problema para resolverlo por el método de Newton Raphson.

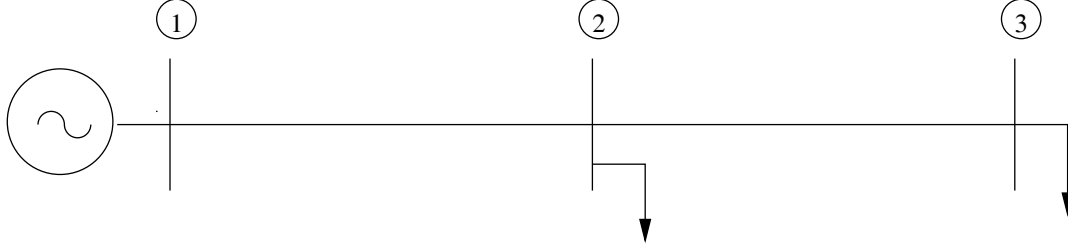


Figura 5.4: Red eléctrica de 3 nodos

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta P_1}{\delta \theta_1} & \frac{\delta P_1}{\delta \theta_2} & \frac{\delta P_1}{\delta \theta_3} & \frac{\delta P_1}{\delta V_1} & \frac{\delta P_1}{\delta V_2} & \frac{\delta P_1}{\delta V_3} \\ \frac{\delta P_2}{\delta \theta_1} & \frac{\delta P_2}{\delta \theta_2} & \frac{\delta P_2}{\delta \theta_3} & \frac{\delta P_2}{\delta V_1} & \frac{\delta P_2}{\delta V_2} & \frac{\delta P_2}{\delta V_3} \\ \frac{\delta P_3}{\delta \theta_1} & \frac{\delta P_3}{\delta \theta_2} & \frac{\delta P_3}{\delta \theta_3} & \frac{\delta P_3}{\delta V_1} & \frac{\delta P_3}{\delta V_2} & \frac{\delta P_3}{\delta V_3} \\ \frac{\delta Q_1}{\delta \theta_1} & \frac{\delta Q_1}{\delta \theta_2} & \frac{\delta Q_1}{\delta \theta_3} & \frac{\delta Q_1}{\delta V_1} & \frac{\delta Q_1}{\delta V_2} & \frac{\delta Q_1}{\delta V_3} \\ \frac{\delta Q_2}{\delta \theta_1} & \frac{\delta Q_2}{\delta \theta_2} & \frac{\delta Q_2}{\delta \theta_3} & \frac{\delta Q_2}{\delta V_1} & \frac{\delta Q_2}{\delta V_2} & \frac{\delta Q_2}{\delta V_3} \\ \frac{\delta Q_3}{\delta \theta_1} & \frac{\delta Q_3}{\delta \theta_2} & \frac{\delta Q_3}{\delta \theta_3} & \frac{\delta Q_3}{\delta V_1} & \frac{\delta Q_3}{\delta V_2} & \frac{\delta Q_3}{\delta V_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \\ \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix}$$

Como se observa de la figura anterior, las ecuaciones nodales están descritas en función de (P, Q, V y θ). El modelo matemático del problema de flujo de carga toma la siguiente estructura matricial.

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{H} & \text{N} \\ \text{J} & \text{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{NPQ} \\ + \\ \text{NPV} \\ \text{NPQ} \end{array} \right.$$

Los errores de potencia (ΔP y ΔQ) son calculados como la diferencia entre la potencia inyectada por el sistema externo (especificado) e interno (calculado) de la siguiente manera:

$$\Delta P = P^{\text{especificado}} - P^{\text{calculado}}$$

$$\Delta Q = Q^{\text{especificado}} - Q^{\text{calculado}}$$

El modelo de n ecuaciones linealizadas para el problema de flujo de carga es escrito de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta P}{\delta \theta} & \frac{\delta P}{\delta V} V \\ \frac{\delta Q}{\delta \theta} & \frac{\delta Q}{\delta V} V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \frac{\Delta V}{V} \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones podrán ser planteadas en forma polar ó rectangular, dependiendo de como se describa la variable de estado (voltaje).

$$V_p = e_p + Jf_p ; \quad V_p = |V_p|e^{J\theta_p}$$

Ecuaciones del Modelo de flujo de Carga de Newton:

En el sistema de energía eléctrica podrán ser planteadas 2.n ecuaciones nodales (n de potencia activa y n de potencia reactiva), que conforman el modelo matemático y que se denominan sistema de ecuaciones 1 y 2.

Las ecuaciones del sistema 1 son aquellas que conforman el modelo del flujo de carga, el resto de ecuaciones (2.n - ecuaciones del Sistema 1) se denominan ecuaciones del sistema 2.

Las ecuaciones que conforman el sistema 1 dependen del tipo de nodo, así: En nodos generadores se plantea ecuación de potencia activa y en el nodo de carga se plantea tanto la ecuación de potencia activa como de reactiva.

Con las ecuaciones del sistema 2 se podran determinar resultados complementarios, como son la potencia activa y reactiva generada en el nodo Slack y la potencia reactiva generada en los nodos generadores.

Términos de la matriz jacobiana:

Esta matriz está compuesta por términos diagonales y no diagonales. Los términos diagonales escritos en forma polar son:

$$\frac{\delta P_k}{\delta \theta_k}, \frac{\delta P_k}{\delta V_k}, \frac{\delta Q_k}{\delta \theta_k}, \frac{\delta Q_k}{\delta V_k}$$

Los términos fuera de la diagonal en forma polar, son descritos así:

$$\frac{\delta P_k}{\delta \theta_m}, \frac{\delta P_k}{\delta V_m}, \frac{\delta Q_k}{\delta \theta_m}, \frac{\delta Q_k}{\delta V_m}$$

La descripción polar es la más frecuentemente utilizada en la literatura especializada. El flujo de carga es la etapa inicial de otros problemas, como es el caso del estimador de estado, flujo de carga desacoplado, entre otros y en la mayoría de estos se parte del hecho de que el modelo se plantea en componentes polares.

Ecuación básica planteada en componentes polares:

$$P_k + JQ_k = V_k e^{J\theta_k} \sum_{m=1}^n Y_{km} e^{-J\varphi_{km}} V_m e^{-J\theta_m}$$

Dedución de los términos de la diagonal: $(\frac{\delta P_k}{\delta \theta_k} \text{ y } \frac{\delta Q_k}{\delta \theta_k})$

$$P_k + JQ_k = V_k^2 Y_{kk} e^{-J\varphi_{kk}} + V_k e^{J\theta_k} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n Y_{km} e^{-J\varphi_{km}} V_m e^{-J\theta_m}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta P_k}{\delta \theta_k} + J \frac{\delta Q_k}{\delta \theta_k} &= J V_k e^{J\theta_k} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n Y_{km} e^{-J\varphi_{km}} V_m e^{-J\theta m} \\
\frac{\delta P_k}{\delta \theta_k} + J \frac{\delta Q_k}{\delta \theta_k} &= -J V_k^2 Y_{kk} e^{-J\varphi_{kk}} + \underbrace{J(V_k e^{J\theta_k} \sum_{m=1}^n Y_{km} e^{-J\varphi_{km}} V_m e^{-J\theta m})}_{P_k + JQ_k} \\
\frac{\delta P_k}{\delta \theta_k} + J \frac{\delta Q_k}{\delta \theta_k} &= -J V_k^2 Y_{kk} e^{-J\varphi_{kk}} + J(P_k + JQ_k) \\
\frac{\delta P_k}{\delta \theta_k} + J \frac{\delta Q_k}{\delta \theta_k} &= -J V_k^2 (G_{kk} - J B_{kk}) + J(P_k + JQ_k)
\end{aligned}$$

Separando en parte real e imaginaria se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta P_k}{\delta \theta_k} &= -V_k^2 B_{kk} - Q_k \\
\frac{\delta Q_k}{\delta \theta_k} &= -V_k^2 G_{kk} + P_k
\end{aligned}$$

Deducción de los términos de la diagonal: $(\frac{\delta P_k}{\delta V_k} V_k$ y $\frac{\delta Q_k}{\delta V_k} V_k)$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta P_k}{\delta V_k} + J \frac{\delta Q_k}{\delta V_k} &= 2V_k Y_{kk} e^{J\varphi_{kk}} + e^{J\theta_k} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n Y_{km} e^{-J\varphi_{km}} V_m e^{-J\theta m} \\
\frac{\delta P_k}{\delta V_k} V_k + J \frac{\delta Q_k}{\delta V_k} V_k &= 2V_k^2 Y_{kk} e^{-J\varphi_{kk}} + V_k e^{J\theta_k} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n Y_{km} e^{-J\varphi_{km}} V_m e^{-J\theta m} \\
\frac{\delta P_k}{\delta V_k} V_k + J \frac{\delta Q_k}{\delta V_k} V_k &= V_k^2 Y_{kk} e^{-J\varphi_{kk}} + V_k e^{J\theta_k} \sum_{m=1}^n Y_{km} e^{-J\varphi_{km}} V_m e^{-J\theta m} \\
\frac{\delta P_k}{\delta V_k} V_k + J \frac{\delta Q_k}{\delta V_k} V_k &= V_k^2 Y_{kk} e^{-J\varphi_{kk}} + P_k + JQ_k \\
\frac{\delta P_k}{\delta V_k} V_k + J \frac{\delta Q_k}{\delta V_k} V_k &= V_k^2 (G_{kk} - J B_{kk}) + P_k + JQ_k
\end{aligned}$$

Partiendo en parte real e imaginaria se tiene:

$$\frac{\delta P_k}{\delta V_k} V_k = V_k^2 G_{kk} + P_k$$

$$\frac{\delta Q_k}{\delta V_k} V_k = -V_k^2 B_{kk} + Q_k$$

Dedución de términos fuera de la diagonal: $(\frac{\delta P_k}{\delta \theta_m} \text{ y } \frac{\delta Q_k}{\delta \theta_m})$

$$P_k + JQ_k = V_k e^{J\theta_k} \sum_{m=1}^n Y_{km} e^{-J\varphi_{km}} V_m e^{-J\theta m}$$

$$\frac{\delta P_k + J\delta Q_k}{\delta \theta_m} = -JV_k e^{J\theta_k} Y_{km} e^{-J\varphi_{km}} V_m e^{-J\theta m}$$

$$\frac{\delta P_k + J\delta Q_k}{\delta \theta_m} = -J(e_k + Jf_k)(G_{km} - JB_{km})(e_m - Jf_m)$$

Partiendo en parte real e imaginaria se obtiene:

$$\frac{\delta P_k}{\delta \theta_m} = -e_k e_m B_{km} - e_k f_m G_{km} + f_k e_m G_{km} - f_k f_m B_{km} = H_{km}$$

$$\frac{\delta Q_k}{\delta \theta_m} = -e_k e_m G_{km} + e_k f_m B_{km} - f_k e_m B_{km} - f_k f_m G_{km} = J_{km}$$

Dedución de los términos fuera de la diagonal: $(\frac{\delta P_k}{\delta V_m} V_m \text{ y } \frac{\delta Q_k}{\delta V_m} V_m)$

$$\frac{\delta P_k}{\delta V_m} + J\frac{\delta Q_k}{\delta V_m} = V_k e^{J\theta_k} Y_{km} e^{-J\varphi_{km}} e^{-J\theta m}$$

$$V_m \frac{\delta P_k}{\delta V_m} + JV_m \frac{\delta Q_k}{\delta V_m} = V_k e^{J\theta_k} Y_{km} e^{-J\varphi_{km}} V_m e^{-J\theta m}$$

Partiendo en parte real e imaginaria se obtiene:

$$V_m \frac{\delta P_k}{\delta V_m} = e_k e_m G_{km} - e_k f_m B_{km} + f_k e_m B_{km} + f_k f_m G_{km} = N_{km}$$

$$V_m \frac{\delta Q_k}{\delta V_m} = f_k e_m G_{km} - f_k f_m B_{km} - e_k e_m B_{km} - e_k f_m G_{km} = L_{km}$$

Terminos de la diagonal:

$$H_{kk} = -Q_k - B_{kk} V_k^2$$

$$L_{kk} = Q_k - B_{kk} V_k^2$$

$$N_{kk} = P_k + G_{kk}V_k^2$$

$$J_{kk} = P_k - G_{kk}V_k^2$$

Terminos fuera de la diagonal:

$$H_{km} = L_{km} = -e_k e_m B_{km} - e_k f_m G_{km} + f_k e_m G_{km} - f_k f_m B_{km}$$

$$N_{km} = -J_{km} = e_k e_m G_{km} - e_k f_m B_{km} + f_k e_m B_{km} + f_k f_m G_{km}$$

Ejercicio: Dada la siguiente red de 3 nodos y 3 líneas, una demanda de 720 MW y 410 MVARs y una generación de 800 MW, solucionarlo por el método de Newton Raphson .

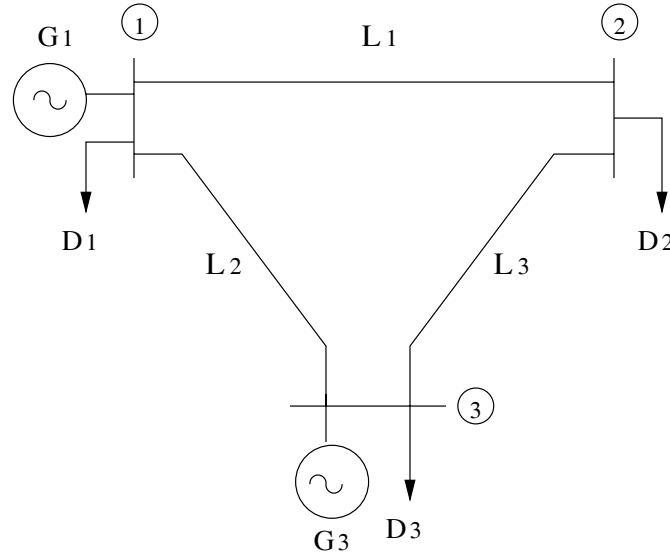


Figura 5.5: Red eléctrica de 3 nodos

Voltaje de operación = 230 KV

$P_{base} = 100$ MVA

Datos de nodo

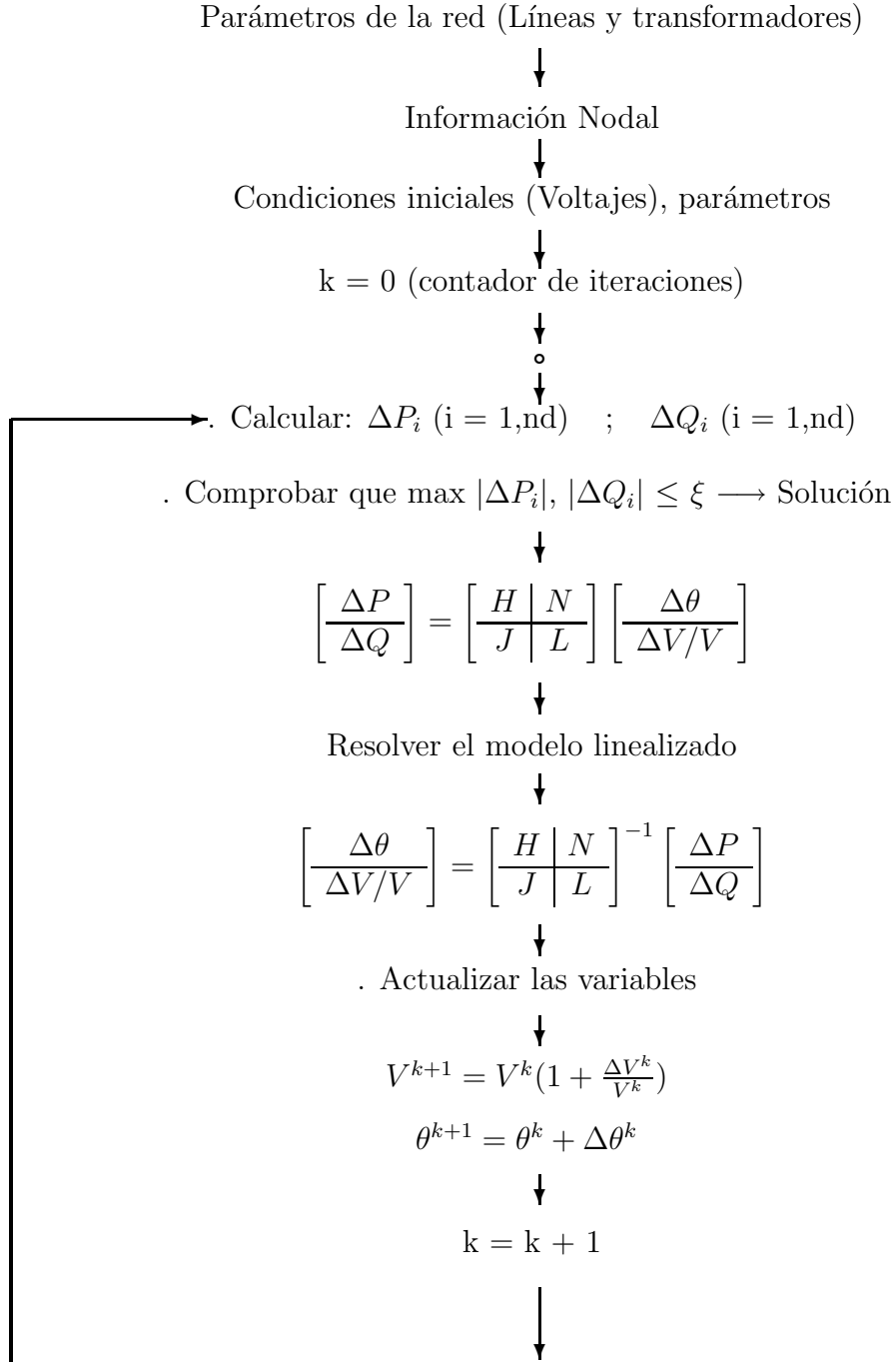
		PD (MW)	QD (MVAR)	PG (MW)	QG	$V_{esp.}$
Nodo	1	200	100	400	300	1.02
Nodo	2	300	160	—	—	—
Nodo	3	220	150	400	300	1.02

Datos de líneas y transformadores

Nodo A	Nodo B	R (p.u.)	X (p.u.)	Y/2 (p.u.)
1	2	0.027	0.1835	0.1050
1	3	0.013	0.0900	0.0820
2	3	0.017	0.1193	0.0960

METODO	GAUSS SEIDEL	NEWTON ACOPLADO	NEWTON DESACOPLADO	NEWTON DESACOPLADO RAPIDO	WARD Y HALE	LINEAL
VOLTAJES NODALES						
1	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02
2	0.82530	0.82395	0.82376	0.82425	0.82373	1
3	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02
ANGULOS [Grados]						
1	0	0	0		0	0
2	-14.08927	-14.18044	14.18525	-14.17450	-14.17018	-12.47039
3	-0.45146	-0.48744	-0.48822	-0.48807	-0.48363	-0.07168
GENERACIÓN						
POTENCIA ACTIVA [MW]						
1	335.81031	337.16553	337.2086	337.14800	336.99700	320
2	0.97214	0.04607	-0.0890	0.01100	0.14600	0
3	400.17283	400.02119	400.03910	399.954	400	401.39002
POTENCIA REACTIVA[Mvar]						
1	182.6472	183.78625	183.4653	183.192	183.4840	
2	0.91405	0.21375	0.07857	0.4400	-0.0440	
3	292.22033	293.53217	293.69550	293.274	293.697	
DEMANDA						
POTENCIA ACTIVA [MW]						
1	200	200	200	200	200	200
2	300	300	300	300	300	300
3	220	220	220	220	220	220
FLUJOS DE POTENCIA						
POTENCIA ACTIVA [MW]						
1-2	126.88280	127.52616	127.5262	127.49602	127.43322	118.60998
1-3	8.92751	9.63937	9.63937	9.65194	9.56409	1.39002
2-3	-179.09535	-179.55640	-179.55640	-179.51834	-179.45680	
POTENCIA REACTIVA [Mvar]						
1-2	92.88280	93.24392	93.2439	93.07546	93.35540	
1-3	-9.78492	-9.88180	-9.88180	9.88351	9.87158	
2-3	-95.814	-96.311	-96.311	-96.17627	-96.461	
FLUJOS DE POTENCIA						
POTENCIA ACTIVA [MW]						
2-1	-119.93251	-120.48967	-120.4897	-120.47064	-120.39685	
3-1	-8.91736	-9.62753	-9.62753	-9.64007	-9.55244	
3-2	-189.09019	189.64873	189.64873	189.59362	189.55244	181.39002
POTENCIA REACTIVA [Mvar]						
2-1	-63.271	-63.474	93.4745	-63.38658	-63.58296	
3-1	-7.02733	-7.098880	-7.09880	-7.09688	-7.11030	
3-2	149.4276	150.6309	150.6309	150.3711	150.8076	
PERDIDAS EN LAS LINEAS						
POTENCIA ACTIVA [MW]						
1-2	6.95029	7.03648	7.03648	7.02539	7.03637	
1-3	0.01016	0.01184	0.01184	0.01187	0.01165	
2-3	9.99484	10.09233	10.09233	10.07528	10.09564	
POTENCIA REACTIVA [Mvar]						
1-2	29.16028	29.76946	29.76946	29.68888	29.77244	
1-3	-16.99226	16.98060	16.98060	16.98039	16.98188	
2-3	53.61364	54.31919	54.31919	54.19485	54.34588	

ALGORITMO PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE FLUJO DE POTENCIA POR NEWTON RAPHSON



Ejemplo: Dado un sistema de 4 nodos y 4 líneas, como se muestra en la figura 5.6, solucionarlo por el método de Newton Raphson.

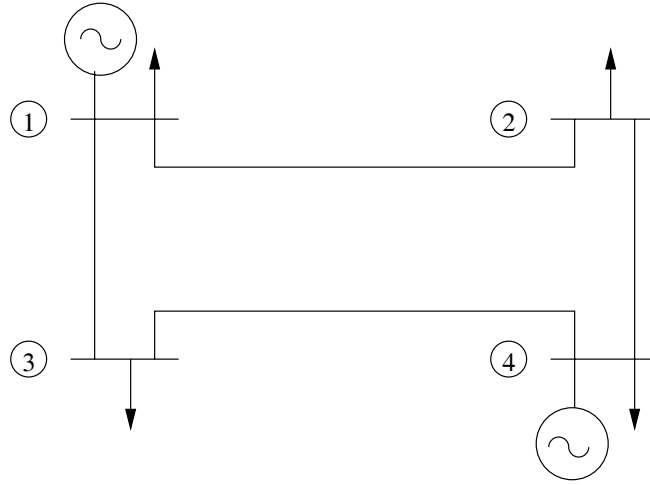


Figura 5.6: Red eléctrica de 4 nodos

Datos de líneas:

Línea	Nodo inicial y final	Z_{Serie} en p.u.	$Y_{\text{sh}}/2$ en p.u.
L_1	1-2	$0.01008 + j 0.05040$	0.05125
L_2	1-3	$0.00744 + j 0.03720$	0.03875
L_3	2-4	$0.00744 + j 0.03720$	0.03875
L_4	3-4	$0.01272 + j 0.06360$	0.06375

Datos de barras:

Barra	P_g p.u.	Q_g p.u.	P_d p.u.	Q_d p.u.	V p.u.	Tipo de nodo
1	-	-	0.50	0.3099	$1.0 \angle 0^\circ$	Slack
2	0	0	1.70	1.0535	-	Carga
3	0	0	2.00	1.2394	-	Carga
4	3.18	-	0.80	0.4958	1.02	Generador

Resultados:

Inicio del Subproblema 1

$$Y_{bus} = \begin{bmatrix} 8.9852 - 44.8360i & -3.8156 + 19.0781i & -5.1696 + 25.8478i & 0 \\ -3.8156 + 19.0781i & 8.9852 - 44.8360i & 0 & -5.1696 + 25.8478i \\ -5.1696 + 25.8478i & 0 & 8.1933 - 40.8638i & -3.0237 + 15.1185i \\ 0 & -5.1696 + 25.8478i & -3.0237 + 15.1185i & 8.1933 - 40.8638i \end{bmatrix}$$

Condiciones iniciales: Voltajes incógnitas = 1.0 p.u.

Angulos incógnitas = 0°

Primera iteración

Errores de potencia $[\Delta P|\Delta Q] = \begin{bmatrix} -1.5966 & -1.9395 & 2.2129 & -0.4465 & -0.8345 \end{bmatrix}$

Cumple tolerancia ? [NO]

$$Jacobianos = \begin{bmatrix} 45.4429 & 0 & -26.3648 & 8.8818 & 0 \\ 0 & 41.2687 & -15.4209 & 0 & 8.1328 \\ -26.3648 & -15.4209 & 41.7857 & -5.2730 & -3.0842 \\ -9.0886 & 0 & 5.2730 & 44.2290 & 0 \\ 0 & -8.2537 & 3.0842 & 0 & 40.4590 \end{bmatrix}$$

Resolviendo para $\Delta\delta$ y ΔV , y recalculando δ y V tenemos:

$$\begin{array}{rcll} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ V & = & 1.0000 & 0.9834 & 0.9710 & 1.0200 \\ Angulos^\circ & = & 0 & -0.9309 & -1.7879 & 1.5438 \end{array}$$

Segunda iteración

Errores de potencia $[\Delta P|\Delta Q] = \begin{bmatrix} -0.0323 & -0.0645 & 0.0359 & -0.0342 & -0.0620 \end{bmatrix}$

Cumple tolerancia ? [NO]

$$Jacobianos = - \begin{bmatrix} 44.3749 & 0 & -25.6778 & 7.1397 & 0 \\ 0 & 39.7018 & -14.7736 & 0 & 5.9619 \\ -26.1256 & -15.1217 & 41.2473 & -4.1296 & -2.1828 \\ -10.3562 & 0 & 6.2998 & 43.0530 & 0 \\ 0 & -9.6597 & 3.8597 & 0 & 38.4642 \end{bmatrix}$$

Resolviendo para $\Delta\delta$ y ΔV , y recalculando δ y V tenemos:

$$\begin{array}{rcll} V & = & 1.0000 & 0.9824 & 0.9690 & 1.0200 \\ Angulos^\circ & = & 0 & -0.9760 & -1.8720 & 1.5231 \end{array}$$

Tercera iteración:

Errores de potencia $[\Delta P|\Delta Q] = \begin{bmatrix} -0.0339 & -0.1455 & -0.0424 & -0.0414 & -0.1646 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$

Cumple tolerancia ? [SI]

$$Jacobian = \begin{bmatrix} 44.3270 & 0 & -25.6508 & 7.0969 & 0 \\ 0 & 39.6096 & -14.7398 & 0 & 5.8755 \\ -26.1026 & -15.0938 & 41.1963 & -4.1183 & -2.1655 \\ -10.33721 & 0 & 6.3048 & 42.9755 & 0 \\ 0 & -9.6932 & 3.8683 & 0 & 38.3186 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución final para las variables de estado V y δ son

$$\begin{array}{rcll} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ |V| & = & 1.0000 & 0.9824 & 0.9690 & 1.0200 \\ Angulos^o & = & 0 & -0.9760 & -1.8720 & 1.5231 \end{array}$$

Resultados con base en ecuaciones del subproblema 2

Para el cálculo se aplica una potencia base 100 MVA

Potencias activas inyectadas:

$$\begin{array}{l} P_1 = 136.7948 \text{ Mw} \\ P_2 = -169.9966 \text{ Mw} \\ P_3 = -199.9854 \text{ Mw} \\ P_4 = 237.9958 \text{ Mw} \end{array}$$

Potencias Reactivas inyectadas:

$$\begin{array}{l} Q_1 = 83.4977 \text{ MVAR} \\ Q_2 = -105.3459 \text{ MVAR} \\ Q_3 = -123.9235 \text{ MVAR} \\ Q_4 = 131.8393 \text{ MVAR} \end{array}$$

Flujos de Potencia:

$$\begin{array}{ll} P_{12} = 38.6883 \text{ Mw} & Q_{12} = 22.2969 \text{ Mvar} \\ P_{13} = 98.1065 \text{ Mw} & Q_{13} = 61.2008 \text{ Mvar} \\ P_{24} = -131.5350 \text{ Mw} & Q_{24} = -74.1109 \text{ Mvar} \\ P_{34} = -102.9101 \text{ Mw} & Q_{34} = -60.3650 \text{ Mvar} \\ P_{21} = -38.4616 \text{ Mw} & Q_{21} = -31.2349 \text{ Mvar} \\ P_{31} = -97.0753 \text{ Mw} & Q_{31} = -63.5585 \text{ Mvar} \\ P_{42} = 133.2504 \text{ Mw} & Q_{42} = 74.9166 \text{ Mvar} \\ P_{43} = 104.7453 \text{ Mw} & Q_{43} = 56.9227 \text{ Mvar} \end{array}$$

5.10.3 Transformadores reguladores

Los transformadores reguladores se pueden usar para controlar los flujos de potencia activa y reactiva en un circuito. El modelo de este transformador para estudios de flujos de carga fue explicado en 3.3.12. (transformador en fase - control de potencia reactiva)

En la siguiente figura se presenta una representación detallada de este transformador.

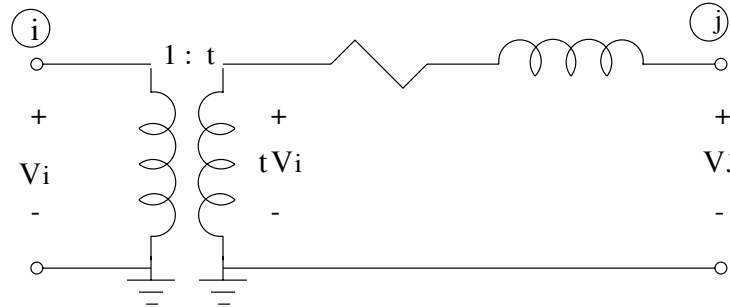


Figura 5.7: Representación del transformador regulador

El modelo equivalente del transformador mostrado anteriormente es:

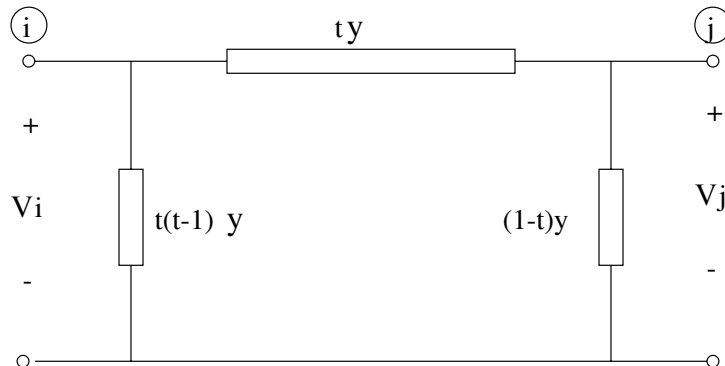


Figura 5.8: Modelo del transformador regulador

t es representado por un real, ya que no existe desplazamiento angular entre el primario y secundario, por lo tanto solo existe cambio en la magnitud.

En el problema de flujo de potencia los taps podrán ser incluidos de manera manual o automática.

Manejo manual de Taps en transformadores

En el caso manual la variable t no es incluida explícitamente en la formulación del Newton Raphson. En este después de cada iteración los Taps deben ser ajustados usando una técnica de desplazamiento así:

$c_i = [-0.5 \Leftrightarrow -1.0]$ valores típicos empleados.

Los términos de la matriz Jacobiana se calculan así:

$$t_2 \frac{\delta P_i}{\delta t_2}, t_2 \frac{\delta Q_i}{\delta t_2}, t_3 \frac{\delta P_i}{\delta t_3}, t_3 \frac{\delta Q_i}{\delta t_3}$$

5.10.4 Solución del flujo de potencia mediante el método de Newton Raphson Desacoplado

Característica propia de cualquier sistema de transmisión de potencia es la fuerte interrelación que existe entre:

$$P \Leftrightarrow \theta$$

$$Q \Leftrightarrow |V|$$

Se tomará provecho de esta característica para obtener un modelo de flujo de carga que emplee menos memoria y tiempo de cómputo y que entregue resultados lo suficientemente precisos.

En esta forma de trabajo, resuelve separadamente ó "desacopla" los problemas $(P - \theta)$ y $(Q - |V|)$. Este desacople no incluye independencia absoluta de los subproblemas.

Ecuaciones básicas y elementos de la Matriz Funcional

Características de los sistemas de transmisión.

- Alta relación reactancia/resistencia

$$B_{ik} > G_{ik}$$

$$\text{Susceptancia} \quad \text{Conductancia}$$

- La diferencia angular θ_{ik} entre nodos adyacentes es pequeña

$$\text{Sen}\theta_{ik} \simeq \theta_{ik} \quad \text{Cos}\theta_{ik} \simeq 1.0$$

Considerando estas expresiones en el cálculo de los elementos de la matriz Jacobiana en coordenadas polares y utilizando las aproximaciones anteriores se tiene:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ J & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V/V \end{bmatrix}$$

- Características de la submatriz N
 - Las conductancias G_{ik} están asociadas a valores de coseno.

- Las susceptancias B_{ik} están asociadas a valores de seno.
- Se obtiene entonces valores relativamente pequeños.
- En la submatriz J.
 - Ocurre lo mismo que en la submatriz N
- En la submatriz H y L
 - El elemento B_{ik} (susceptancia) está acompañada de valores coseno
 - Se obtienen entonces valores relativamente grandes

Por lo tanto el peso asociado de las submatrices H y L es mayor que el de las submatrices J y N, lo cual permite despreciar el efecto de estas últimas.

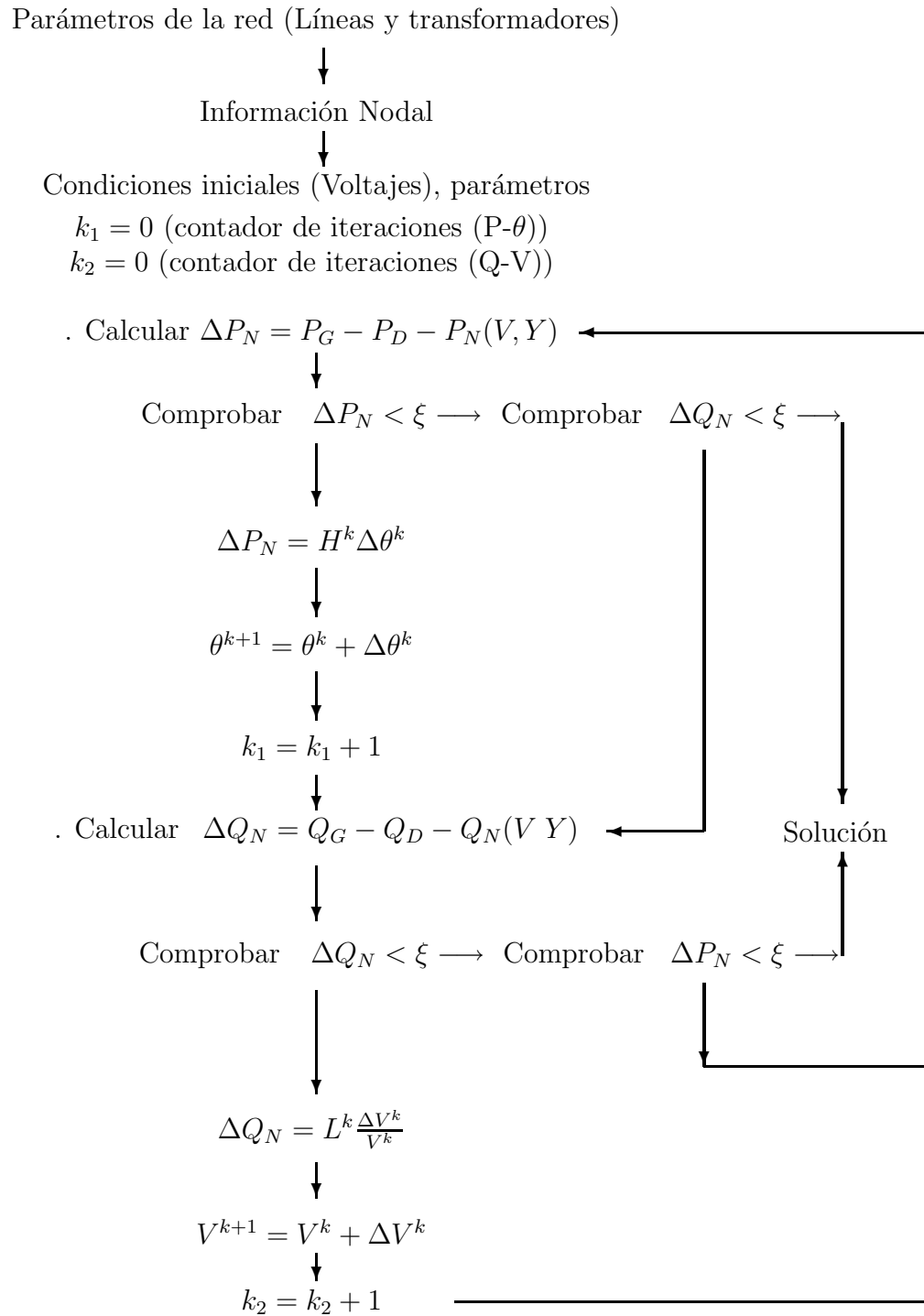
$$\begin{bmatrix} \Delta P_N \\ \Delta Q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & O \\ O & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V/V \end{bmatrix}$$

Se obtienen entonces dos ecuaciones desacopladas de un menor orden (casi la mitad de las utilizadas en los métodos acoplados).

Características de las matrices H y L:

- Tiene la misma forma de la matriz admitancia nodal
- Son matrices simétricas en posición no en valor
- Son función de los valores de voltaje por lo cual están cambiando constantemente
- Tamaño de la matriz H (NPQ + NPV)
- Tamaño de la matriz L (NPQ)

ALGORITMO PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE FLUJO DE POTENCIA DESACOPLADO DE NEWTON



Ejemplo: Resolver el sistema de dos barras mostrado en la figura 5.10 por el método flujo de carga desacoplado de Newton.

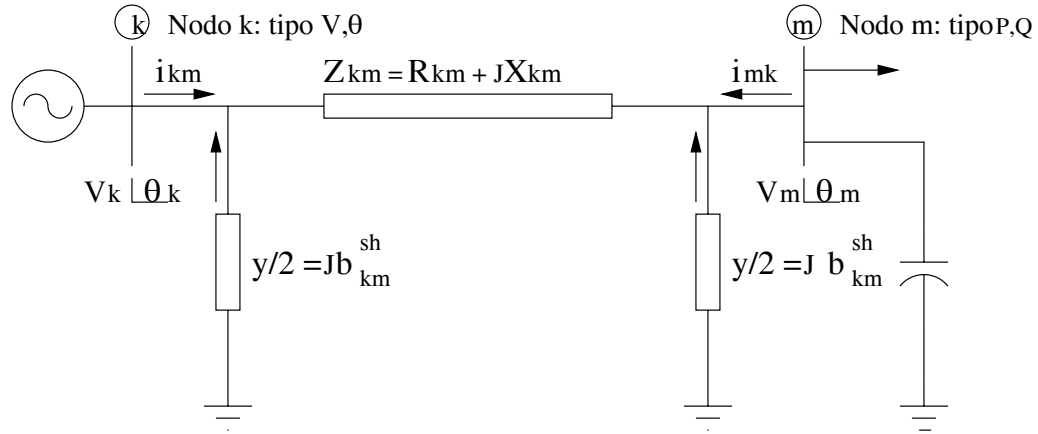


Figura 5.10: Red eléctrica de 2 nodos

Datos del sistema

Barra 1: (V- θ)

Entonces: $V_1 = 1.0 \text{ p.u.}$ $\theta_1 = 0.0$: incógnitas : P_1, Q_1

Barra 2: (P-Q)

Entonces: $P_2 = -0.30 \text{ p.u.}$ $Q_2 = 0.07 \text{ p.u.}$ incógnitas : V_2, θ_2

Tolerancia de convergencia: $\xi = 0.002 \text{ p.u.}$

Parámetros del sistema (línea de transmisión):

$R_{1-2} = 0.2 \text{ p.u.}$, $X_{1-2} = 1.0 \text{ p.u.}$, $y/2 = 0.02 \text{ p.u.}$

($P_{base} = 100 \text{ MW}$)

Expresiones requeridas en el cálculo

$$P_2 = 0,1923V_2^2 - 0,1923V_2\cos\theta_2 + 0,9615V_2\sin\theta_2$$

$$Q_2 = 0,9415V_2^2 - 0,1923V_2\sin\theta_2 - 0,9615V_2\cos\theta_2$$

$$\Delta P_2 = -0,30 - P_2$$

$$\Delta Q_2 = 0,07 - Q_2$$

$$H_{22} = -Q_2 + 0,9415V_2^2$$

$$L_{22} = \frac{1}{V_2} [Q_2 + 0,9415V_2^2]$$

Proceso iterativo de solución

- Condiciones iniciales

i) $K_p = K_q = 1$; $p = q = 0$; $\theta_2 = 0^\circ$; $V_2^o = 1.0$; $\xi = 0.003$

- Primera iteración (P- θ)

ii) $P_2(V_2^o, \theta_2^o) = 0,1923(V_2^o)^2 - 0,1923V_2^o \cos \theta_2^o + 0,9615V_2^o \sin \theta_2^o$

$P_2(V_2^o, \theta_2^o) = 0,1923(1)^2 - 0,1923(1)(1) + 0,9615(1)(0) = 0$

$\Delta P_2(V_2^o, \theta_2^o) = -0,30 - 0,0 \Rightarrow \Delta P_2(V_2^o, \theta_2^o) = -0,30$

iii) $|\Delta P_2(V_2^o, \theta_2^o)| = 0,30 < \xi = 0,003$ [NO]

iv) $H_{22}(V_2^o, \theta_2^o) = -Q_2(V_2^o, \theta_2^o) + 0,9415(V_2^o)^2$

$Q_2(V_2^o, \theta_2^o) = 0,9415(V_2^o)^2 - 0,1923(V_2^o) \sin \theta_2^o - 0,9615V_2^o \cos \theta_2^o$

$Q_2(V_2^o, \theta_2^o) = 0,9415 - 0,9615 = -0,02$

$H_{22}(V_2^o, \theta_2^o) = -(-0,02) + 0,9415 = 0,9615$

$\Delta P_2(V_2^o, \theta_2^o) = H_{22}(V_2^o, \theta_2^o) \Delta \theta_2^o \Rightarrow \Delta \theta_2^o = \frac{-0,30}{0,9615} = -0,31201$

v) $\theta_2^1 = \theta_2^o + \Delta \theta_2^o = 0 - 0,31201 \Rightarrow \theta_2^o - 0,3121$

vi) $p = 0 + 1 = 1$

vii) $K_q = 1 \Rightarrow (x)$

- Primera iteración (Q-V)

x) $Q_2(V_2^o, \theta_2^1) = 0,9415(V_2^o)^2 - 0,1923V_2^o \sin \theta_2^1 - 0,9615V_2^o \cos \theta_2^1$

$Q_2(V_2^o, \theta_2^1) = 0,9415 - 0,1923 \sin(-0,31201) - 0,9615 \cos(-0,31201)$

$Q_2(V_2^o, \theta_2^1) = 0,08545$

$\Delta Q_2(V_2^o, \theta_2^1) = 0,07 - 0,08545 \Rightarrow \Delta Q_2(V_2^o, \theta_2^1) = -0,01545$

xi) $|\Delta Q_2(V_2^o, \theta_2^1)| = 0,01545 < \xi = 0,003$ [NO]

xii) $L_{22}(V_2^o, \theta_2^1) = V \frac{1}{V_2^o} [Q_2(V_2^o, \theta_2^1) + 0,9415(V_2^o)^2]$

$L_{22}(V_2^o, \theta_2^1) = 0,08545 + 0,9415 = 1,02695$

$\Delta Q_2(V_2^o, \theta_2^1) = L_{22}(V_2^o, \theta_2^1) \Delta V_2^o \Rightarrow \Delta V_2^o = \frac{-0,01545}{1,02695} = -0,01505$

$\Delta V_2^o = -0,01505$

xiii) $V_2^1 = V_2^o + \Delta V_2^o = 1,0 - 0,01505 = 0,98495$

$V_2^1 = 0,98495$

xiv) $q = 0 + 1 = 1$

xv) $K_p = 1$

- Segunda iteración (P- θ)

- ii) $P_2(V_2^1, \theta_2^1) = 0,1923(V_2^1)^2 - 0,1923V_2^1 \cos \theta_2^1 + 0,9615V_2^1 \sin \theta_2^1$
 $P_2(V_2^1, \theta_2^1) = 0,1923(0,98495)^2 - 0,1923(0,98495) \cos(-0,31201) +$
 $0,9615(0,98495) \sin(-0,31201)$
 $P_2(V_2^1, \theta_2^1) = -0,28442$
 $\Delta P_2(V_2^1, \theta_2^1) = -0,30 - (-0,28442) \Rightarrow \Delta P_2(V_2^1, \theta_2^1) = -0,01558$
- iii) $|\Delta P_2(V_2^1, \theta_2^1)| = 0,01558 < \xi = 0,003$ [NO]
- iv) $H_{22}(V_2^1, \theta_2^1) = -Q_2(V_2^1, \theta_2^1) + 0,9415(V_2^1)^2$
 $Q_2(V_2^1, \theta_2^1) = 0,9415(V_2^1)^2 - 0,1923V_2^1 - 0,9615V_2^1 \cos \theta_2^1$
 $Q_2(V_2^1, \theta_2^1) = 0,98495[0,9415(0,98495) - 0,1923 \sin(-0,31201) - 0,9615 \cos(-0,31201)]$
 $Q_2(V_2^1, \theta_2^1) = 0,07021$
 $H_{22}(V_2^1, \theta_2^1) = -0,07021 + 0,9415(0,98495)^2 = 0,84316$
 $\Delta P_2(V_2^1, \theta_2^1) = H_{22}(V_2^1, \theta_2^1) \Delta \theta_2^1 \Rightarrow \Delta \theta_2^1 = \frac{-0,01558}{0,84316} = -0,01848$
- v) $\theta_2^2 = \theta_2^1 + \Delta \theta_2^1 = -0,31201 - 0,01848 = -0,33049$
 $\theta_2^2 = -0,33049$ (rad)
- vi) $p = 1 + 1 = 2$
- vii) $k_q = 1 \Rightarrow (x)$

• Segunda iteración (Q-V)

- x) $Q_2(V_2^1, \theta_2^1) = 0,9415(V_2^1)^2 - 0,1923V_2^1 \sin \theta_2^2 - 0,9615V_2^1 \cos \theta_2^2$
 $Q_2(V_2^1, \theta_2^1) = (0,98495)[0,9415(0,98495) - 0,1923 \sin(-0,33049) - 0,9615 \cos(-0,33049)]$
 $Q_2(V_2^1, \theta_2^1) = 0,07906$
 $\Delta Q_2(V_2^1, \theta_2^1) = 0,07 - (0,07906) \Rightarrow \Delta Q_2(V_2^1, \theta_2^1) = -0,00906$
- xi) $|\Delta Q_2(V_2^1, \theta_2^1)| = 0,00906 < \xi = 0,003$ [NO]
- xii) $L_{22}(V_2^1, \theta_2^2) = \frac{1}{V_2^1} [Q_2(V_2^1, \theta_2^2) + 0,9415(V_2^1)^2]$
 $L_{22}(V_2^1, \theta_2^2) = \frac{1}{0,98495} [0,0706 + 0,9415(0,98495)^2] = 1,00760$
 $\Delta Q_2(V_2^1, \theta_2^2) = L_{22}(V_2^1, \theta_2^2) \Delta V_2^1 \Rightarrow \Delta V_2^1 = \frac{-0,00906}{1,0076} = -0,00899$
 $\Delta V_2^1 = -0,00899$
- xiii) $V_2^2 = V_2^1 + \Delta V_2^1 = 0,98495 - 0,00899 = 0,97596$
 $V_2^2 = 0,97596$
- xiv) $q = 1 + 1 = 2$
- xv) $K_p = 1 \Rightarrow (ii)$

• Tercera iteración ($P - \theta$)

- ii) $P_2(V_2^2, \theta_2^2) = 0,1923(V_2^2)^2 - 0,1923V_2^2 \cos\theta_2^2 + 0,9615V_2^2 \sin\theta_2^2$
 $P_2(V_2^2, \theta_2^2) = -0,29887$
 $\Delta P_2(V_2^2, \theta_2^2) = -0,30 - (-0,29887) = -0,00113$
- iii) $|\Delta P_2(V_2^2, \theta_2^2)| = 0,00113 < \xi = 0,003$ [SI]
 El subproblema $P\theta$ convergió $\Rightarrow$ ir al paso (viii)
- viii) $k_p = 0 \Rightarrow (ix)$
- ix) El subproblema QV aún no converge, pues $K_q = 1$, entonces ir a (x)

• Tercera iteración (Q-V)

- x) $Q_2(V_2^2, \theta_2^2) = 0,9415(V_2^2)^2 - 0,1923V_2^2 \sin\theta_2^2 - 0,9615\cos\theta_2^2$
 $Q_2(V_2^2, \theta_2^2) = 0,07074$
 $\Delta Q_2 = (V_2^2, \theta_2^2) = 0,07 - 0,07074 \Rightarrow \Delta Q_2(V_2^2, \theta_2^2) = -0,00074$
- xi) $|\Delta Q_2(V_2^2, \theta_2^2)| = 0,00074 < \xi = 0,003$ [SI]
 Entonces el subproblema QV convergió $\Rightarrow (xvi)$
- xvi) $K_q = 0 \Rightarrow (xvii)$
- xvii) El subproblema $P\theta$ también convergió, ya que $K_p = 0$
- xviii) Convergencia lograda:
 $\theta_2 = \theta_2^2 = -0,33049$ (rad.)
 $V_2 = V_2^2 = 0,97596$ (p.u.)

Observación:

Si fuera efectuada una iteración adicional, los valores obtenidos de θ_2 y V_2 son los siguientes:

$$\theta_2 = -0,33186 \text{ (rad.)}$$

$$V_2 = 0,97522 \text{ (p.u.)}$$

5.10.5 Newton Raphson Desacoplado rápido

Además de las simplificaciones hechas al Newton Raphson desacoplado, se contemplan algunas simplificaciones adicionales con el fin de mejorar el método en lo que se refiere a requerimiento de memoria y tiempo de computo sin desmejorar la calidad de los resultados. Las simplificaciones al modelo matemático son hechas con base en las características que presentan los sistemas de transmisión, tal como se describe a continuación:

- Alta relación reactancia/resistencia por lo tanto $B_{ik} > G_{ik}$
- La diferencia angular entre nodos adyacentes es pequeña, por lo tanto:
 $\sin(\theta_k - \theta_j) \approx 0$
 $\cos(\theta_k - \theta_j) \approx 1.0$

- De experiencia obtenida en el estudio de sistemas de potencia, utilizando valores en por unidad, se sabe que

$$Q_k \ll B_{kk} V_k^2$$

- En sistemas bien condicionados, se puede asumir que los valores de las tensiones de los nodos del sistema son próximas a 1.

Si se aplican estas simplificaciones a las submatrices H y L se obtiene:

$$H_{kk} = -Q_k - V_k^2 B_{kk}$$

$$H_{km} = V_k V_m (G_{km} \text{Sen} \theta_{km} - B_{km} \text{Cos} \theta_{km})$$

$$L_{kk} = Q_k - V_k^2 B_{kk}$$

$$L_{km} = V_k V_m (G_{km} \text{Sen} \theta_{km} - B_{km} \text{Cos} \theta_{km})$$

Sea V una matriz diagonal cuyos elementos no nulos son las magnitudes de las tensiones de barra del sistema, se obtiene entonces:

$$H = V H'$$

$$L = V L'$$

Quedando los terminos de la matriz jacobiana de la siguiente forma:

$$H'_{km} = V_m (G_{km} \text{Sen} \theta_{km} - B_{km} \text{Cos} \theta_{km})$$

$$H'_{kk} = -\frac{Q_k}{V_k} - V_k B_{kk}$$

$$L'_{km} = G_{km} \text{Sen} \theta_{km} - B_{km} \text{Cos} \theta_{km}$$

$$L'_{kk} = \frac{Q_k}{V_k^2} - B_{kk}$$

Así las ecuaciones del método de Newton desacoplado asume la forma de:

$$\frac{\Delta P}{V} = H' \Delta \theta$$

$$\frac{\Delta Q}{V} = L' \Delta V$$

Ahora introducimos las siguientes aproximaciones:

- $\text{Cos} \theta_{km} \approx 1$
- $|B_{km}| \geq |G_{km} \text{Sen} \theta_{km}|$
- $|B_{kk} V_k^2| \geq |Q_k|$

La tercera aproximación es verdadera, ya que las reactancias shunt (cargas, reactores, capacitores y shunt de líneas) son mucho mayores que las reactancias serie de las líneas y transformadores. Con las aproximaciones, los terminos anteriores toman la siguiente forma:

$$H'_{km} \approx -V_m B_{km}$$

$$H'_{kk} \approx -V_k B_{kk}$$

$$L'_{km} \approx -B_{km}$$

$$L'_{kk} \approx -B_{kk}$$

Considerando adicionalmente que $V_m \approx V_k \approx 1$ se tendrá:

$$H' \approx B'$$

$$L' \approx B''$$

Siendo la estructura de las matrices B' y B'' semejantes a la de la matriz Y_{bus} , con las siguientes diferencias:

- En B' no aparece la línea y la columna de la barra $V\theta$
- En B'' no aparecen las líneas y columnas de las barras $V\theta$ y PV

Las ecuaciones del método desacoplado rápido son las siguientes:

$$\frac{\Delta P}{V} = B' \Delta \theta$$

$$\frac{\Delta Q}{V} = B'' \Delta V$$

Donde las submatrices B' y B'' son constantes y dependen solamente de los parámetros de la red.

Finalmente el método desacoplado rápido presenta un mejor desempeño cuando son despreciadas las resistencias serie en la formación de B' , entonces $b_{km} = \frac{1}{X_{km}}$ y tenemos que:

$$B' \Rightarrow \begin{cases} B'_{km} &= -\frac{1}{X_{km}} \\ B'_{kk} &= \sum_{m \in \Omega_k} \frac{1}{X_{km}} \end{cases}$$

$$B'' \Rightarrow \begin{cases} B''_{km} &= -B_{km} \\ B''_{kk} &= -B_{kk} \end{cases}$$

Donde B_{km} y B_{kk} son elementos de la matriz de susceptancias B y X_{km} es la reactancia serie de una línea de transmisión.

ALGORITMO PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE FLUJO DE POTENCIA RAPIDO DE NEWTON

Parámetros de la red (Líneas y transformadores)

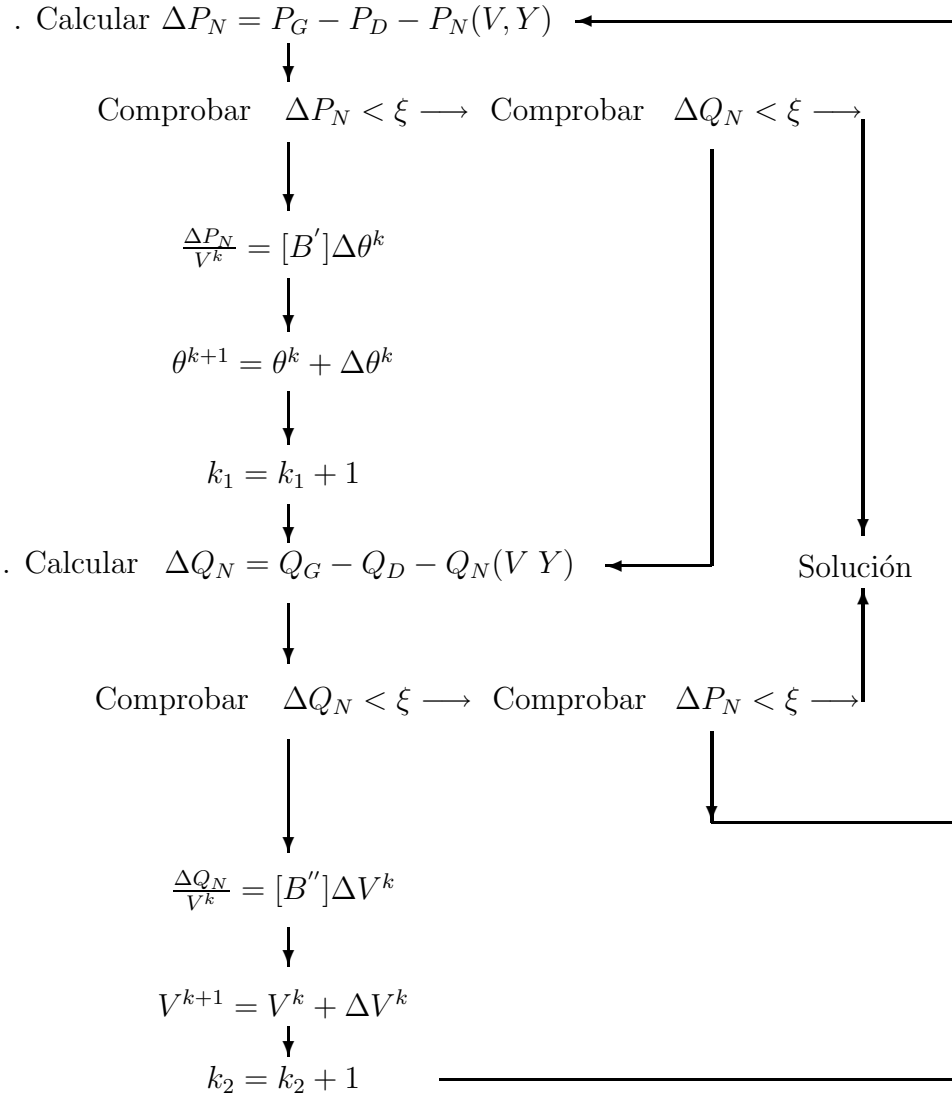
↓
Información Nodal
↓

Condiciones iniciales (Voltajes), parámetros

$k_1 = 0$ (contador de iteraciones (P- θ))

$k_2 = 0$ (contador de iteraciones (Q-V))

Conforman las matrices $[B']$ y $[B'']$



Ejemplo: Resolver el mismo problema del ejemplo anterior, empleando el método de Newton Raphson desacoplado rápido

Expresiones necesarias

$$P_2 = 0,1923V_2^2 - 0,1923V_2\cos\theta_2 + 0,9615V_2\sin\theta_2$$

$$Q_2 = 0,9415V_2^2 - 0,1923V_2\sin\theta_2 - 0,9615V_2\cos\theta_2$$

$$\Delta P_2 = -0,30 - P_2$$

$$\Delta Q_2 = 0,07 - Q_2$$

$$B' = \frac{1}{X_{12}} = 1$$

$$B'' = -B_{22} = 0,9415$$

Comentarios a la matriz jacobiana del flujo de carga desacoplado rápido

- En la formación de B' no participa la línea y la columna de la barra ($V - \theta$)
- En la formación de B'' no participan las líneas y columnas de las barras ($V - \theta$) y (P-V)
- Dimensión de B' : NPQ + NPV
- Dimensión de B'' : NPQ

• Condiciones iniciales

$$\text{i) } K_p = K_q = 1; \quad p = q = 0; \quad \theta_2^o = 0,0; \quad V_2^0 = 1,0; \quad \xi = 0,003$$

• Primera iteración ($P - \theta$)

$$\text{ii) } P_2(V_2^o, \theta_2^o) = 0,1923(V_2^o)^2 - 0,1923V_2^o\cos\theta_2^o + 0,9615V_2^o\sin\theta_2^o = 0,0$$

$$\Delta P_2(V_2^o, \theta_2^o) = -0,30 - 0 = -0,30$$

$$\text{iii) } |\Delta P_2(V_2^o, \theta_2^o)| < \xi \quad ? \quad [\text{NO}]$$

$$\text{iv) } \frac{\Delta P_2(V_2^o, \theta_2^o)}{V_2^o} = B' \Delta \theta_2^o \Rightarrow \Delta \theta_2^o = \frac{-0,30}{1 \cdot 1} = -0,30$$

$$\text{v) } \theta_2^1 = \theta_2^o + \Delta \theta_2^o = 0 - 0,30 = -0,30$$

$$\theta_2^1 = -0,30$$

$$\text{vi) } p = 0 + 1 = 1$$

$$\text{vii) } K_q = 1 \Rightarrow \text{ir al paso (x)}$$

• Primera iteración (Q-V)

$$\text{x) } Q_2(V_2^0, \theta_2^1) = 0,9515(V_2^o)^2 - 0,1923V_2^o\sin\theta_2^o - 0,9615V_2^o\cos\theta_2^o = 0,07977$$

$$\Delta Q_2(V_2^0, \theta_2^1) = 0,07 - 0,07977 = -0,00977$$

$$\text{xi) } |\Delta Q_2(V_2^0, \theta_2^1)| < \xi \quad ?$$

$$0,00977 < 0,003 \quad [\text{NO}]$$

$$\text{xii) } \frac{\Delta Q_2(V_2^0, \theta_2^1)}{V_2^o} = B'' \Delta V_2^o \Rightarrow \Delta V_2^o = \frac{-0,00977}{1(0,9415)} = -0,01038$$

- xiii) $V_2^1 = V_2^o + \Delta V_2^o = 1,0 - 0,01038 = 0,98962$
 $V_2^1 = 0,98962$
- xiv) $q = 0 + 1 = 1$
- xv) $k_p = 1 \Rightarrow (ii)$
- Segunda iteración ($P - \theta$)
 - ii) $P_2(V_2^1, \theta_2^1) = 0,1923(V_2^1)^2 - 0,1923V_2^1 \cos \theta_2^1 + 0,9615V_2^1 \sin \theta_2^1$
 $P_2(V_2^1, \theta_2^1) = -0,27467$
 $\Delta P_2(V_2^1, \theta_2^1) = -0,30 - (-0,2746) = -0,02533$
 - iii) $|\Delta P_2(V_2^1, \theta_2^1)| < \xi$?
 $0,02533 < 0,0033$ [NO]
 - iv) $\frac{\Delta P_2(V_2^1, \theta_2^1)}{V_2^1} = B' \Delta \theta_2^1 \Rightarrow \Delta \theta_2^1 = \frac{-0,02533}{1*(0,98962)} = -0,02560$
 - v) $\theta_2^2 = \theta_2^1 + \Delta \theta_2^1 = -0,30 - 0,02560 = -0,32560$
 $\theta_2^2 = -0,32560$
 - vi) $p = 1 + 1 = 2$
 - vii) $k_q = 1 \Rightarrow ira(x)$
- Segunda iteración (Q-V)
 - x) $Q_2(V_2^1, \theta_2^2) = 0,9415(V_2^1)^2 - 0,1923V_2^1 \sin \theta_2^2 - 0,9615V_2^1 \cos \theta_2^2$
 $Q_2(V_2^1, \theta_2^2) = 0,08140$
 $\Delta Q_2(V_2^1, \theta_2^2) = 0,07 - 0,0814 = -0,0114$
 - xi) $|\Delta Q_2(V_2^1, \theta_2^2)| < \xi$? [NO]
 - xii) $\frac{\Delta Q_2(V_2^1, \theta_2^2)}{V_2^1} = B'' \Delta V_2^2 \Rightarrow \Delta V_2^2 = \frac{-0,01140}{0,9415(0,98962)} = -0,01224$
 $\Delta V_2^2 = 0,01224$
 - xiii) $V_2^2 = V_2^1 + \Delta V_2^2 = 0,98962 - 0,01224 = 0,97738$
 $V_2^2 = 0,97738$
 - xiv) $q = 1 + 1 = 2$
 - xv) $k_p = 1 \Rightarrow$ ir al paso (ii)
- Tercera iteración ($P - \theta$)
 - ii) $P_2(V_2^2, \theta_2^2) = 0,1923(V_2^2)^2 - 0,1923V_2^2 \cos \theta_2^2 + 0,9615V_2^2 \sin \theta_2^2$
 $P_2(V_2^2, \theta_2^2) = -0,29448$
 $\Delta P_2(V_2^2, \theta_2^2) = -0,30 - (-0,29448) = -0,00502$
 - iii) $|\Delta P_2(V_2^2, \theta_2^2)| < \xi$? [NO]
 - iv) $\frac{\Delta P_2(V_2^2, \theta_2^2)}{V_2^2} = B' \Delta \theta_2^2 \Rightarrow \Delta \theta_2^2 = \frac{-0,00502}{1*(0,97738)} = -0,00514$

- v) $\theta_2^3 = \theta_2^2 + \Delta\theta_2^2 = -0,32560 - 0,00514 = -0,33073$
 $\theta_2^3 = -0,33073$
- vi) $p = 2 + 1 = 3$
- vii) $k_q = 1 \Rightarrow$ ir a (x)
- Tercera iteración (Q-V)
 - x) $Q_2(V_2^2, \theta_2^3) = 0,9415(V_2^2)^2 - 0,1923V_2^2 \text{Sen}\theta_2^3 - 0,9615V_2^2 \text{Cos}\theta_2^3$
 $\Delta Q_2(V_2^2, \theta_2^3) = 0,0716$
 $\Delta Q_2(V_2^2, \theta_2^3) = 0,07 - 0,0716 = -0,0016$
 $|\Delta Q_2(V_2^2, \theta_2^3)| < \xi$? Si, ya que $0,0016 < 0,003$
 El subproblema QV convergió y no se requiere de efectuar la iteración.
 - xvi) $K_Q = 0$ e ir al paso (xvii)
 - xvii) El subproblema $P\theta$ aún no converge ya que $K_p = 1 \Rightarrow$ (ii)
- Cuarta Iteración($P - \theta$):
 - ii) $P_2(V_2^2, \theta_2^3) = 0,1923(V_2^2)^2 - 0,1923V_2^2 \text{Cos}\theta_2^3 + 0,9615V_2^2 \text{Sen}\theta_2^3$
 $P_2(V_2^2, \theta_2^3) = -0,29923$
 $\Delta P_2(V_2^2, \theta_2^3) = -0,30 - (-0,29923) = -0,00077$
 - iii) $|\Delta P_2(V_2^2, \theta_2^3)| < \xi$? Si, ya que $0,00077 < 0,003$
 - viii) $K_p = 0 \Rightarrow$ (ix)
 - ix) El subproblema QV también convergió, ya que $K_Q = 0$
 - xviii) La solución obtenida
 $\theta_2 = \theta_2^3 = -0,33073$
 $V_2 = V_2^2 = 0,9774$

Observación:

El error es reducido después de una iteración adicional, obteniendose:

$$\theta_2 = -0,33193$$

$$V_2 = 0,97518$$

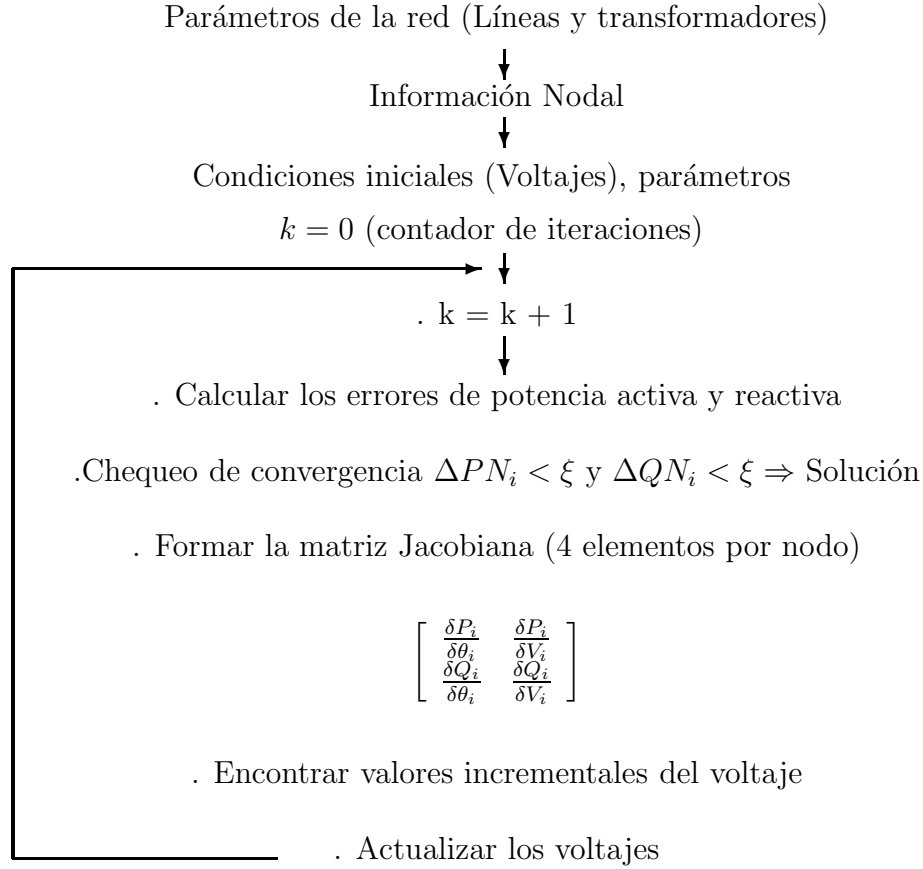
5.10.6 Método de Ward y Hale

Se presenta por su valor histórico y se desarrolla a nivel informativo.

Concepto básico: Las potencias nodales son muy dependientes de los valores de tensión y ángulo de fase de su propio nodo.

Lo anterior unido a las limitaciones en la capacidad de memoria de los computadores de la época (década de los años 50), permitió plantear un método en el cual sólo se considerarían los elementos diagonales de la matriz Jacobiana.

ALGORITMO PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE FLUJO DE POTENCIA WARD Y HALE



Ecuaciones: El modelo se puede plantear tanto en coordenadas polares como en rectangulares tal como se describe a continuación.

Rectangulares:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_{Ni} \\ \Delta Q_{Ni} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \delta P_{Ni}/\delta f_i & \delta P_{Ni}/\delta e_i \\ \delta Q_{Ni}/\delta f_i & \delta Q_{Ni}/\delta e_i \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \Delta f_i \\ \Delta e_i \end{bmatrix}^{k+1}$$

Polares:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_{Ni} \\ \Delta Q_{Ni} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \delta P_{Ni}/\delta \theta_i & \delta P_{Ni}/\delta V_i \\ \delta Q_{Ni}/\delta \theta_i & \delta Q_{Ni}/\delta V_i \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta V_i \end{bmatrix}^{k+1}$$

Los terminos del jacobiano (derivadas parciales) ya fueron determinados al estudiar los métodos acoplados de Newton Raphson. La matriz jacobiana tendra una estructura diagonal cuyos elementos son (H_{kk}) , (L_{kk}) , (J_{kk}) , (N_{kk}) .

En cada nodo se plantean dos ecuaciones, y cada uno de estos presenta dos incógnitas (Voltaje en magnitud y ángulo o voltaje en parte real e imaginario).

En general para los n nodos se tendrán n sistemas y cada uno de estos conformado por $(P_i - Q_i)$

5.10.7 Pequeña Modificación en el Método Desacoplado Rápido

En algunas aplicaciones de flujo de carga los elementos shunt equivalentes pueden asumir valores de admitancia anormalmente elevados, lo que puede llevar a dificultades en el método desacoplado rápido. La dificultad aparece debido a que la aproximación:

$$|B_{kk} V_k^2| \geq |Q_k|$$

ya no es mas verdadera.

La alteración ocurre solamente en los elementos de la diagonal de la matriz B'' .

- Análisis de la formación Original

En la formulación original se tiene que:

$$L'_{kk} = -B_{kk} + \frac{Q_k}{V_k^2} \approx -B_{kk} = - \sum_{m \in \Omega_k} b_{km} - \left[b_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} b_{km}^{sh} \right]$$

Entonces:

$$B''_{kk} = L'_{kk} = - \sum_{m \in \Omega_k} b_{km} - \left[b_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} b_{km}^{sh} \right]$$

- Análisis Modificado

$$Q_k = V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \text{Sen} \theta_{km} - B_{km} \text{Cos} \theta_{km})$$

$$Q_k = -B_{kk} V_k^2 + V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \text{Sen} \theta_{km} - B_{km} \text{Cos} \theta_{km})$$

$$L'_{kk} = -B_{kk} + \frac{Q_k}{V_k^2}$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores

$$L'_{kk} = -2B_{kk} + \frac{1}{V_k} \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \text{Sen} \theta_{km} - B_{km} \text{Cos} \theta_{km})$$

Considerando solamente líneas de transmisión (o las simplificaciones correspondientes en el caso de transformadores desfasadores y puros) se tiene que:

$$Y_{km} = -Y_{km} = -g_{km} - jb_{km} = G_{km} + jB_{km}$$

Incorporando los valores de G_{km} y B_{km} y el valor de B_{kk} se tendrá lo siguiente:

$$L'_{kk} = -2 \left[\sum_{m \in \Omega_k} b_{km} + \left(b_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} b_{km}^{sh} \right) \right] + \frac{1}{V_k} \sum_{m \in \Omega_k} V_m (-g_{km} \text{Sen} \theta_{km} + b_{km} \text{Cos} \theta_{km})$$

$$L'_{kk} = -2 \left[b_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} b_{km}^{sh} \right] - \sum_{m \in \Omega_k} \left\{ b_{km} + b_{km} \left(1 - \frac{V_m}{V_k} \text{Cos} \theta_{km} \right) + \frac{V_m}{V_k} g_{km} \text{Sen} \theta_{km} \right\}$$

Si se consideran las siguientes simplificaciones

$$\left| b_{km} \left(1 - \frac{V_m}{V_k} \text{Cos} \theta_{km} \right) \right| \leq |b_{km}|$$

$$\text{y } \left| \frac{V_m}{V_k} g_{km} \text{Sen} \theta_{km} \right| \leq |b_{km}|$$

Que equivale a emplear las aproximaciones:

- $\text{Cos} \theta_{km} \approx 1$
- $|B_{km}| \geq |G_{km} \text{Sen} \theta_{km}|$
- $V_k \approx V_m \approx 1$

Entonces los terminos de L'_{kk} se reducen a:

$$L'_{kk} = -2 \left[b_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} b_{km}^{sh} \right] - \sum_{m \in \Omega_k} b_{km}$$

$$B''_{kk} = L'_{kk} = -2 \left[b_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} b_{km}^{sh} \right] - \sum_{m \in \Omega_k} b_{km}$$

La única diferencia entre la versión original y la modificada es el que en esta última la suma de las susceptancias shunt aparecen multiplicadas por 2.

Es importante observar que la aproximación obtenida considera los $\theta = 0$ y $V = 1,0$ p.u.

CAPÍTULO 6

FLUJO DE CARGA LINEALIZADO

6.1 Introducción

El flujo de carga linealizado llamado también flujo de carga C.C. es una forma aproximada de resolver ecuaciones de flujo de carga no lineal. En la deducción del flujo de carga C.C. es llevada en cuenta la relación estrecha entre el flujo de potencia activa en la línea de transmisión y la abertura angular entre los extremos de la línea.

$$P_{km} \Rightarrow \delta = \theta_k - \theta_m$$

6.1.1 Motivaciones para el uso del Flujo de Carga C.C.

- Los valores obtenidos con este método simplificado presentan resultados de flujos de potencia activa en las líneas con valores muy próximos a los obtenidos usando el modelo no lineal ($\approx 5 - 10\%$)
- El esfuerzo computacional es muy pequeño y robusto.
- En determinados tipos de problemas, como en el planeamiento de sistemas de transmisión, la estructura de los datos lleva con frecuencia a la no convergencia del flujo de carga no lineal convencional. En estos casos es mejor una información de flujos de potencia activa que permitiría encontrar puntos críticos en el sistema (entregada por el flujo de carga c.c.); en estos casos el problema no lineal puede no converger y la información entregada por este no sería útil.
- La aproximación es válida solamente para sistemas de transmisión; esto es, para niveles elevados de tensión. La aproximación es mejor cuanto mayor fuese el nivel de tensión.
- El modelo de flujo de carga C.C. no tiene en cuenta las magnitudes de las tensiones nodales y el flujo de potencia reactiva.

6.2 Linealización de las Ecuaciones No Lineales del Flujo de Carga

6.2.1 El flujo de Potencia P_{km} de una Línea de Transmisión es:

$$P_{km} = V_k^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos \theta_{km} - V_k V_m b_{km} \sin \theta_{km} \quad (6.1)$$

$$P_{mk} = V_m^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos \theta_{km} + V_k V_m b_{km} \sin \theta_{km} \quad (6.2)$$

De (6.1) y (6.2) se determinan las pérdidas así:

$$P_e = P_{km} + P_{mk} = g_{km} [V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos \theta_{km}] \quad (6.3)$$

Despreciando las pérdidas en la línea; esto es, considerando la conductancia de la línea despreciable, entonces

$$g_{km} V_k [V_k - V_m \cos \theta_{km}] \approx 0$$

$$P_{km} = -P_{mk} = -V_k V_m b_{km} \sin \theta_{km} \quad (6.4)$$

Introduciendo además las siguientes aproximaciones:

$$V_k \approx V_m \approx 1 p.u. \quad (6.5)$$

$$\sin \theta_{km} \approx \theta_{km} \quad (\text{en radianes}) \quad (6.6)$$

$$b_{km} = \frac{-x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} \approx -\frac{1}{x_{km}} \quad (6.7)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones (6.5), (6.6), y (6.7) en la ecuación (6.4), se llega a:

$$P_{km} = \frac{\theta_{km}}{x_{km}} = \frac{\theta_k - \theta_m}{x_{km}} \quad (6.8)$$

La ecuación (6.8) tiene la forma de la Ley de Ohm aplicada a una resistencia, tal como se presenta en la figura 6.1

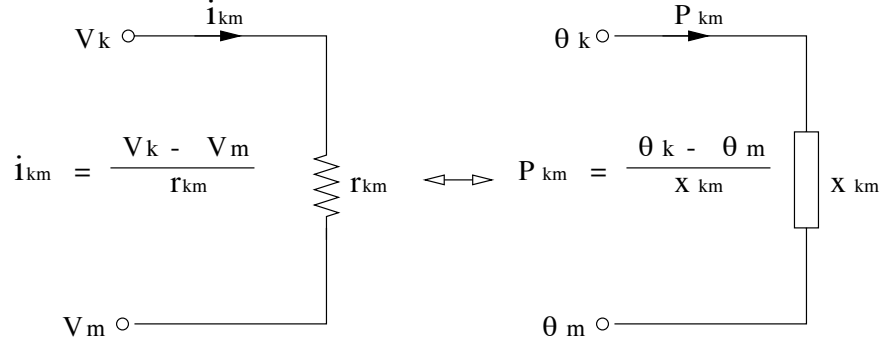


Figura 6.1: Comparación de modelos de corriente continua y D.C.

6.2.2 El flujo P_{km} de un Transformador en fase es:

$$P_{km} = (a_{km}V_k)^2 g_{km} - (a_{km}V_k)V_m g_{km} \cos \theta_{km} - (a_{km}V_k)V_m b_{km} \sin \theta_{km} \quad (6.9)$$

$$P_{mk} = V_m^2 g_{km} - (a_{km}V_k)V_m g_{km} \cos \theta_{km} + (a_{km}V_k)V_m b_{km} \sin \theta_{km} \quad (6.10)$$

Con las simplificaciones introducidas en (6.5) - (6.7), se tiene:

$$P_{km} = -P_{mk} = \frac{a_{km}\theta_{km}}{x_{km}}$$

y haciendo la aproximación $a_{km} \approx 1$, se tiene

$$P_{km} = -P_{mk} = \frac{\theta_{km}}{x_{km}} = \frac{\theta_k - \theta_m}{x_{km}} \quad (6.11)$$

Que tiene la misma forma de la deducida para una línea de transmisión.

6.2.3 El flujo P_{km} de un desfaseador puro es dado por la relación:

$$P_{km} = V_k^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) - V_k V_m b_{km} \sin(\theta_{km} + \varphi_{km}) \quad (6.12)$$

$$P_{mk} = V_m^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) + V_k V_m b_{km} \sin(\theta_{km} + \varphi_{km}) \quad (6.13)$$

Introduciendo las simplificaciones (6.5) - (6.7), se tiene:

$$V_k^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) = V_k g_{km} [V_k - V_m \cos(\theta_{km} + \varphi_{km})] \approx 0$$

$$V_k \approx 1; \quad V_m \approx 1; \quad \cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) \approx 1$$

Entonces (6.13) se reduce a:

$$P_{km} = \frac{\text{Sen}(\theta_{km} + \varphi_{km})}{x_{km}} \quad (6.14)$$

La abertura angular $(\theta_{km} + \varphi_{km})$ entre los extremos de Y_{km} es relativamente pequeña; entonces es posible la aproximación: $\text{Sen}(\theta_{km} + \varphi_{km}) \approx (\theta_{km} + \varphi_{km})$.

Así, (6.14) se reduce a lo siguiente:

$$P_{km} = -P_{mk} = \frac{(\theta_{km} + \varphi_{km})}{x_{km}} \quad (6.15)$$

P_{km} tiene entonces dos componentes, una variable que depende del estado del sistema θ_{km}/x_{km} y otra fija e igual a φ_{km}/x_{km}

En la siguiente figura se representa adecuadamente el modelo linealizado con un desfasador puro:

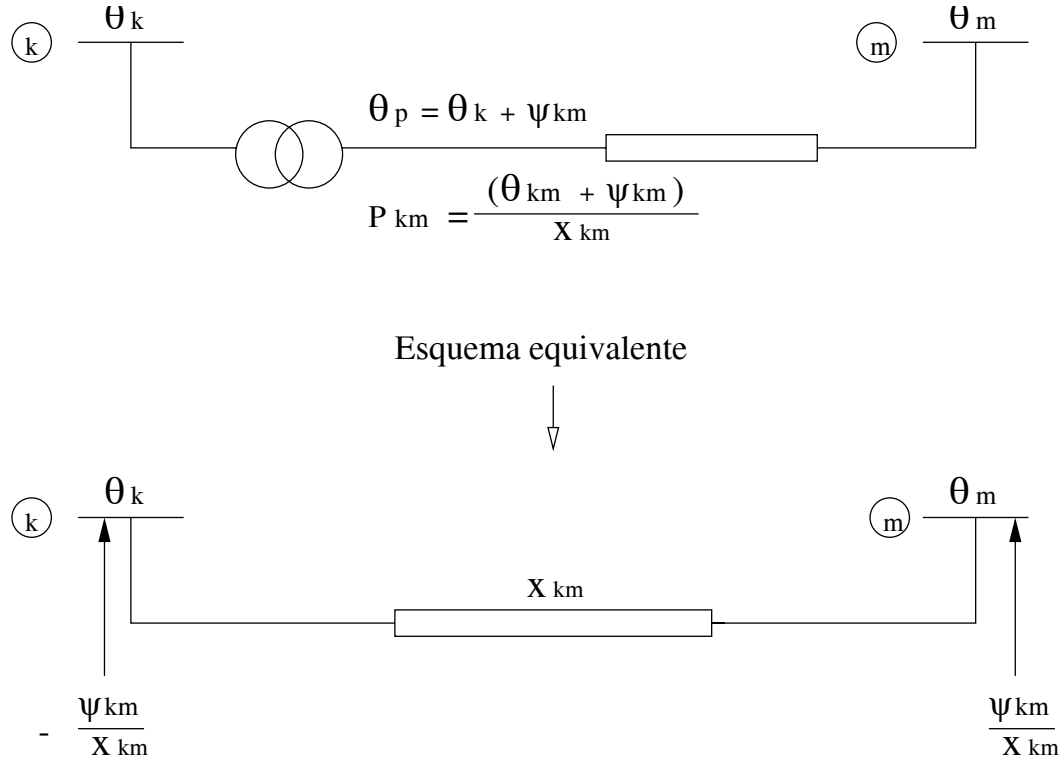


Figura 6.2: Modelo del Transformador Desfasador Puro

Donde la parte del flujo invariante φ_{km}/x_{km} aparece como una carga adicional en la barra k , y una generación adicional en la barra m .

6.3 Formulación Matricial del Flujo de Carga C.C.

$$P = B' \theta$$

Considerando que el sistema eléctrico tiene solamente líneas de transmisión (sin transformadores en fase o desfasadores). Entonces, el flujo de potencia P_{km} es dado por:

$$P_{km} = x_{km}^{-1} \theta_{km} \quad (6.16)$$

La inyección de potencia activa en la barra k es igual a la suma de los flujos que salen de la barra k ; así:

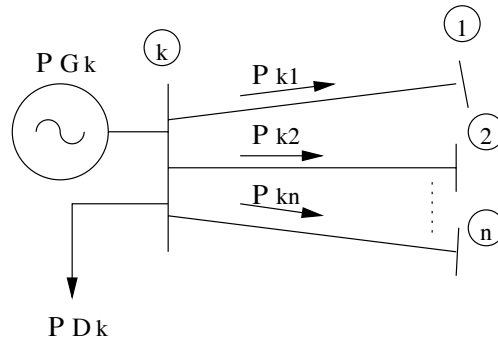


Figura 6.3: Ecuación de balance de potencia nodal

De la figura (6.3) se tiene que:

$$P_k = P_{G_K} - P_{DK} = P_{k1} + P_{k2} + \cdots + P_{kn}$$

Expresados los flujos de potencia activos en función de $(x_{km}$ y $\theta_{km})$

$$P_k = \sum_{m \in \Omega_k} x_{km}^{-1} \theta_{km} \quad k = 1, 2, \dots, nb \quad (6.17)$$

Descripción de la ecuación (6.17)

$$P_k = \frac{1}{x_{k1}}(\theta_k - \theta_1) + \frac{1}{x_{k2}}(\theta_k - \theta_2) + \cdots + \frac{1}{x_{kn}}(\theta_k - \theta_n)$$

Que puede ser separada en dos componentes:

$$P_k = \sum_{m \in \Omega_k} x_{km}^{-1} \theta_k + \sum_{m \in \Omega_k} -x_{km}^{-1} \theta_m \quad (6.18)$$

$$P_k = -\frac{\theta_1}{x_{k1}} - \frac{\theta_2}{x_{k2}} - \frac{\theta_3}{x_{k3}} - \dots - \frac{\theta_n}{x_{kn}} + \frac{\theta_k}{x_{k1}} + \frac{\theta_k}{x_{k2}} + \frac{\theta_k}{x_{k3}} + \dots + \frac{\theta_k}{x_{kn}}$$

$$P_k = -\frac{\theta_1}{x_{k1}} - \frac{\theta_2}{x_{k2}} \dots + \left(\frac{1}{x_{k1}} + \frac{1}{x_{k2}} + \dots + \frac{1}{x_{kn}} \right) \theta_k \dots - \frac{\theta_n}{x_{kn}}$$

$$P_k = -\frac{\theta_1}{x_{k1}} - \frac{\theta_2}{x_{k2}} \dots + \frac{\theta_k}{x_{kk}} \dots - \frac{\theta_n}{x_{kn}}$$

Expresarlo en forma vectorial es como sigue:

$$P_k = \left[-\frac{1}{x_{k1}} - \frac{1}{x_{k2}} \dots + \sum_{l=1}^n \frac{1}{x_{kl}} \dots - \frac{1}{x_{kn}} \right] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_k \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}$$

$$(6.18) \text{ Puede ser representada en forma matricial; así: } P = B' \theta \quad (6.19)$$

Sistema de 4 nodos

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^4 \frac{1}{x_{1n}} & -\frac{1}{x_{12}} & -\frac{1}{x_{13}} & -\frac{1}{x_{14}} \\ -\frac{1}{x_{21}} & \sum_{n=1}^4 \frac{1}{x_{2n}} & -\frac{1}{x_{23}} & -\frac{1}{x_{24}} \\ -\frac{1}{x_{31}} & -\frac{1}{x_{32}} & \sum_{n=1}^4 \frac{1}{x_{3n}} & -\frac{1}{x_{34}} \\ -\frac{1}{x_{41}} & -\frac{1}{x_{42}} & -\frac{1}{x_{43}} & \sum_{n=1}^4 \frac{1}{x_{4n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

Siendo que: $\theta \Rightarrow$ Vector de los ángulos de las tensiones nodales
 $P \Rightarrow$ Vector de las inyecciones líquidas de potencia activa
 $B' \Rightarrow$ Matriz del tipo admitancia nodal y cuyos elementos son:

$$B'_{km} = -x_{km}^{-1} = -\frac{1}{x_{km}} \quad (6.20)$$

$$B'_{kk} = \sum_{m \in \Omega_k} x_{km}^{-1} = \sum_{m \in \Omega_k} \frac{1}{x_{km}} \quad (6.21)$$

La matriz B' en (6.19) es singular y se debe eliminar una de las ecuaciones y adoptar para la barra correspondiente como referencia angular $\theta_k = 0$

La matriz es singular, ya que las pérdidas son despreciadas y la suma de las componentes de P es nula; esto es, la inyección de potencia en una barra cualquiera puede ser obtenida a partir de la suma algebraica de las demás. Así, ahora se transforma en un sistema no singular de dimensión $nb - 1$. La solución de este sistema algebraico entrega los ángulos de las $nb - 1$ barras restantes.

Si el sistema eléctrico tiene transformadores en fase o desfasadores, entonces el sistema de ecuaciones (6.19) continúa válido con las siguientes observaciones:

- La formación de la matriz B' cuando existen transformadores en fase o desfasadores, es realizada exactamente igual que en el caso de las líneas de transmisión.
- En la formación del vector P , se debe considerar la representación equivalente de los desfasadores; esto es, se debe adicionar el flujo fijo φ_{km}/x_{km} en las barras k y m para cada transformador desfasador puro.

Ejemplo: Dado el siguiente sistema de Tres (3) Barras, calcular los flujos de potencia activa por las líneas.

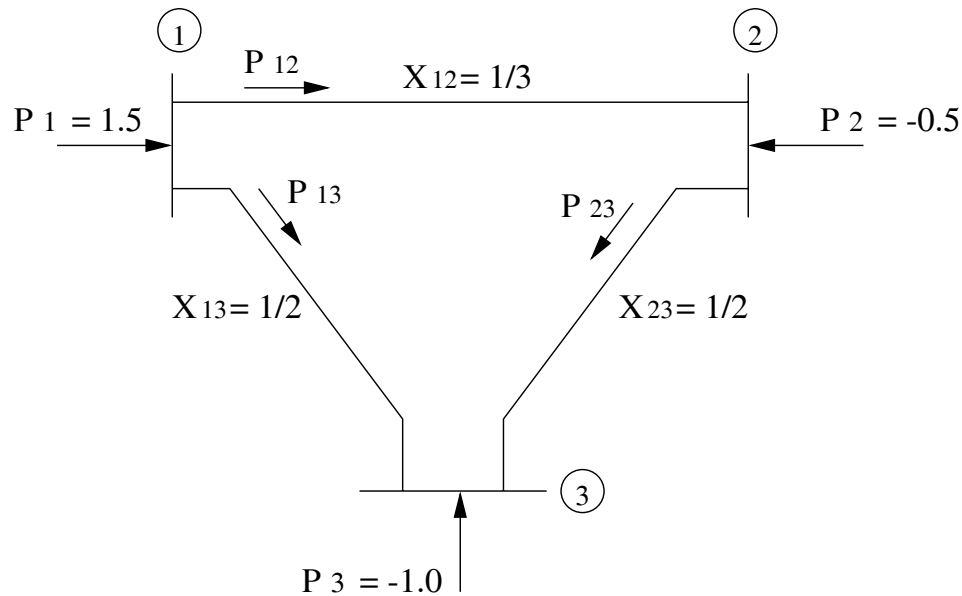


Figura 6.4: Sistema de Tres (3) Barras

$$P = B' \theta \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1,5 \\ -0,5 \\ -1,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

Considerando la referencia angular en la barra 1, $\theta_1 = 0$ se tendrá el siguiente sistema reducido:

$$\begin{bmatrix} -0,5 \\ -1,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0,5 \\ -1,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 1/8 & 5/16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,5 \\ -1,0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ -3/8 \end{bmatrix}$$

Cálculo de Flujos

$$P_{12} = \frac{\theta_{12}}{x_{12}} = \frac{0 - (-1/4)}{1/3} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad P_{12} = 0,75$$

$$P_{13} = \frac{\theta_{13}}{x_{13}} = \frac{0 - (-3/8)}{1/2} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad P_{13} = 0,75$$

$$P_{23} = \frac{\theta_{23}}{x_{23}} = \frac{-1/4 - (-3/8)}{1/2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad P_{23} = 0,25$$

6.4 Representación de las pérdidas en el modelo de Flujo de Carga C.C.

En el modelo C.C. se puede representar el efecto de las pérdidas en el sistema de transmisión. En este las pérdidas son modeladas como cargas distribuidas en todo el sistema y son atendidas por la barra de referencia.

6.4.1 Flujo de carga A.C.:

Potencia generada en la barra de referencia = pérdidas de transmisión + carga neta de todas las demás barras del sistema.

El flujo de potencia activa inyectada en la barra k, es dada por:

$$P_k = \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (6.22)$$

En que k es el conjunto de las barras vecinas de la barra k incluida la propia barra k .

Considerando $V_k = V_m = 1 p.u.$ de (6.22) tenemos:

$$P_k = G_{kk} + \sum_{m \in \Omega_k} (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (6.23)$$

Donde Ω_k es el conjunto de barras vecinas de la barra k , excluida la barra k .

Para una línea de transmisión o transformadores se tiene:

$$G_{km} = -g_{km} \quad (6.24)$$

$$G_{kk} = \sum_{m \in \Omega_k} g_{km} \quad (6.25)$$

$$B_{km} \approx \frac{1}{x_{km}} \quad (6.26)$$

Empleando (6.24), (6.26) en (6.23), se tiene:

$$P_k = \sum_{m \in \Omega_k} g_{km} - \sum_{m \in \Omega_k} g_{km} \cos \theta_{km} + \sum_{m \in \Omega_k} \frac{1}{x_{km}} \sin \theta_{km}$$

$$P_k = \sum_{m \in \Omega_k} (1 - \cos \theta_{km}) g_{km} + \sum_{m \in \Omega_k} x_{km}^{-1} \sin \theta_{km} \quad (6.27)$$

Usando aún la aproximación:

$$\cos \theta_{km} \approx 1 - \frac{\theta_{km}^2}{2}$$

$$\sin \theta_{km} \approx \theta_{km} \text{ (en radianes)}$$

Entonces (6.27) asume la siguiente forma:

$$P_k = \frac{1}{2} \sum_{m \in \Omega_k} g_{km} \theta_{km}^2 + \sum_{m \in \Omega_k} x_{km}^{-1} \theta_{km} \quad (6.28)$$

Comparando las ecuaciones (6.28) y (6.17), se observa que la diferencia está en el término:

$$\frac{1}{2} \sum_{m \in \Omega_k} g_{km} \theta_{km}^2 \quad (6.29)$$

Que representa las pérdidas aproximadas de las líneas de transmisión que salen de la barra k. Este hecho puede ser verificado analizando las pérdidas de transmisión en la línea k-m.

$$P_e = P_{km} + P_{mk} = g_{km}(V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos \theta_{km}) \quad (6.30)$$

Haciendo las siguientes aproximaciones en (6.30), se tiene:

$$V_k = V_m = 1 \text{ p.u. y } \cos \theta_{km} = 1 - \frac{\theta_{km}^2}{2}$$

$$P_e = g_{km} \left(2 - 2 \left(1 - \frac{\theta_{km}^2}{2} \right) \right) \Rightarrow P_e = g_{km} \theta_{km}^2 \quad (6.31)$$

Así, (6.29) representa la mitad de las pérdidas activas de todas las líneas adyacentes a esta barra. Así, el efecto de las pérdidas pueden ser representadas de manera aproximada como cargas adicionales obtenidas al dividir las pérdidas de cada línea del sistema entre sus barras terminales (mitad para cada lado).

Por lo tanto, cuando en el modelo de flujo de carga C.C., se consideran las pérdidas en forma aproximada; este asume la siguiente forma:

$$P + P_{\text{pérdidas}} = B' \theta \quad (6.32)$$

Forma aproximada para resolver (6.32):

- Resolver el sistema $P = B' \tilde{\theta}$ sin tener en cuenta las pérdidas.
- Calcular las pérdidas aproximadas empleando (6.31) y la solución $\tilde{\theta}$ obtenida anteriormente. Distribuir estas pérdidas en todas las barras del sistema como cargas adicionales.
- Resolver el sistema (6.32) con los valores de pérdida obtenidas en el paso anterior. Con los θ conocidos, se calculan los flujos en las líneas.

Ejemplo:

En el ejemplo anterior, recalcular los flujos considerando las pérdidas.

Asumir que $r_{km} = \frac{1}{5} x_{km}$

Cálculo aproximado de las pérdidas:

$$g_{km} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2}$$

$$g_{12} = \frac{\frac{1}{15}}{\left(\frac{1}{15}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{15}{26}$$

$$g_{13} = \frac{\frac{1}{10}}{\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{5}{13}$$

$$g_{23} = \frac{\frac{1}{10}}{\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{5}{13}$$

$$P_{e12} = g_{12}\theta_{12}^2 = \frac{15}{26} \left(0 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2 = \frac{15}{26 \times 26} = 0,036$$

$$P_{e13} = g_{13}\theta_{13}^2 = \frac{5}{13} \left(0 - \left(-\frac{3}{8}\right)\right)^2 = \frac{5 \times 9}{13 \times 64} = 0,054$$

$$P_{e23} = g_{23}\theta_{23}^2 = \frac{5}{13} \left(-\frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{8}\right)\right)^2 = \frac{5}{13 \times 64} = 0,006$$

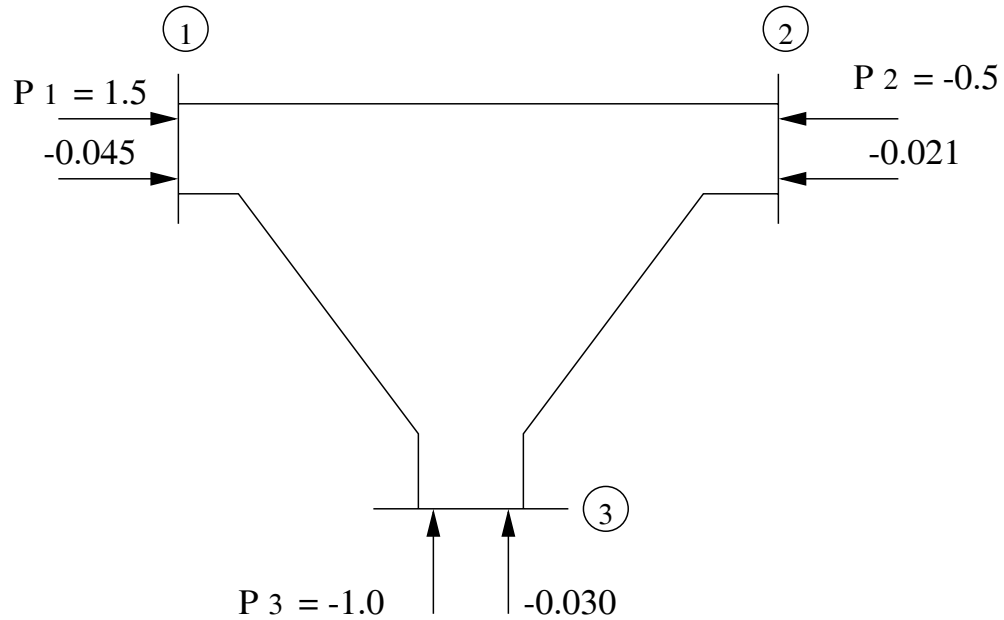


Figura 6.5: Sistemas de 3 nodos incluido el efecto por pérdidas

Al plantear el problema se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 1/8 & 1/16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,521 \\ -1,030 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,259 \\ -0,387 \end{bmatrix}$$

Ahora es posible calcular una mejor aproximación de flujos:

$$P_{12} = \frac{\theta_{12}}{x_{12}} = \frac{0 - (-0,259)}{\frac{1}{3}} \Rightarrow P_{12} = 0,777 \text{ p.u.}$$

$$P_{13} = \frac{\theta_{13}}{x_{13}} = \frac{0 - (-0,387)}{\frac{1}{2}} \Rightarrow P_{13} = 0,774 \text{ p.u.}$$

$$P_{23} = \frac{\theta_{23}}{x_{23}} = \frac{-0,259 - (-0,387)}{\frac{1}{2}} \Rightarrow P_{23} = 0,256 \text{ p.u.}$$

Nuevo valor de P1:

$$P_1 = P_{12} + P_{13} = 1,551 \text{ p.u.}$$

Ejemplo:

En el sistema de 3 barras anterior, sustituir la línea 1-2 por un desfaseador con las siguientes características:

$$\varphi_{12} = 5^\circ, \quad x_{12} = 1/3$$

Recalcular los flujos en las líneas: $\varphi_{12} = 5^\circ = 0,0873 \text{ rad}$

$$P_{12} = \frac{\varphi_{12}}{x_{12}} = \frac{0,0873}{\frac{1}{3}} = 0,2618$$

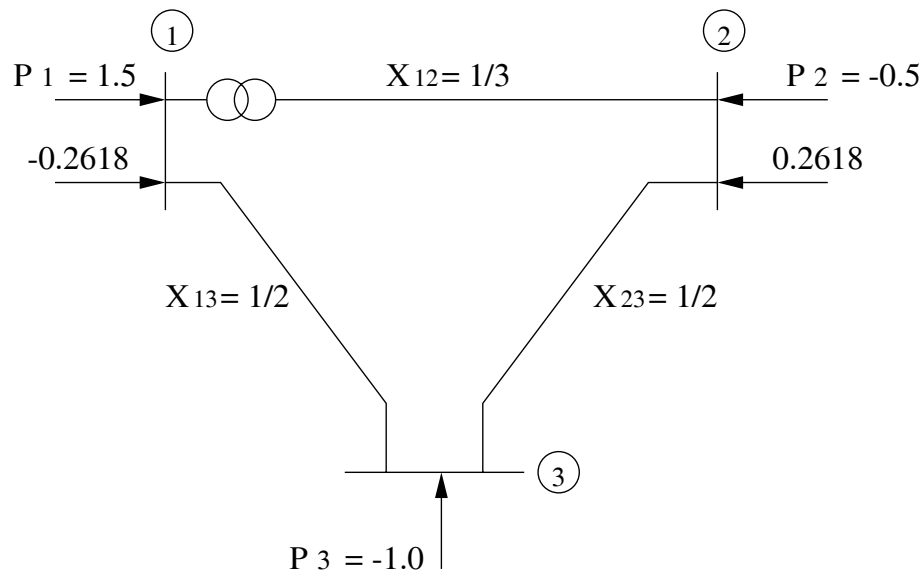


Figura 6.6: Sistema de 3 nodos incluido el efecto del desfaseador

$$P = B' \theta \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1,5 - 0,2618 \\ -0,5 + 0,2618 \\ -1,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

Considerando la referencia angular en la barra 1, entonces $\theta_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} -0,2382 \\ -1,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1846 \\ -0,3423 \end{bmatrix}$$

$$P'_{12} = \frac{\theta_{12}}{X_{12}} = \frac{0,1846}{\frac{1}{3}} = 0,5538 \text{ p.u.}$$

$$P_{12} = P'_{12} + \frac{\varphi_{12}}{X_{12}} = 0,5538 + 0,2618 = 0,8156 \text{ p.u.}$$

$$P_{13} = \frac{\theta_{13}}{X_{13}} = \frac{0,3423}{\frac{1}{2}} = 0,6846 \text{ p.u.}$$

$$P_{23} = \frac{\theta_{23}}{X_{23}} = \frac{-0,1846 - (-0,3423)}{\frac{1}{2}} = 0,3154 \text{ p.u.}$$

Así, el flujo entre 1-2 pasó de 0,75 p.u. para 0,8156 p.u.

Antes del desfasador $P_{12} = 0,75 \text{ pu.}$

Colocando el desfasador $P_{12} = 0,8156 \text{ p.u.}$

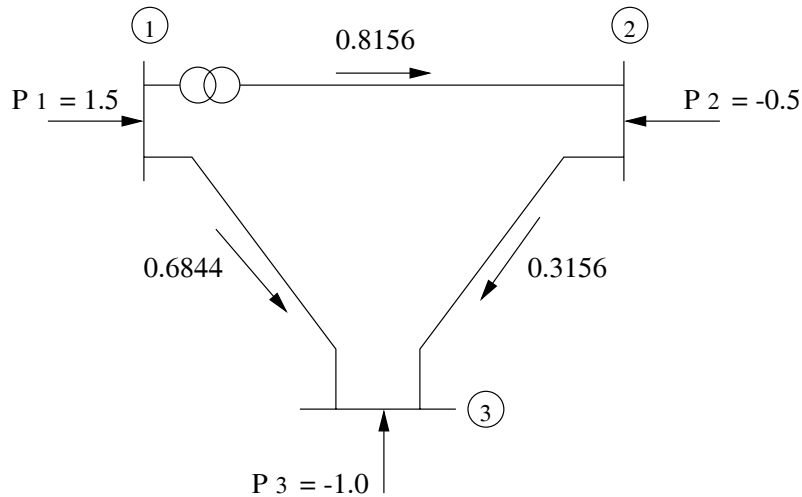


Figura 6.7: Sistema de 3 nodos mostrando los flujos incluido el transformador desfasador

CAPÍTULO 7

REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE LAS REDES ELÉCTRICAS

7.1 Introducción

Las redes de Energía eléctrica son definidas por medio de modelos matemáticos, que pueden ser de diferente tipo, dependiendo de la aplicación y exactitud en los resultados, así, los modelos podrán ser algebraicos, lineales o no lineales, integrodiferenciables. Los modelos algebraicos lineales pueden ser representados por medio de arreglos matriciales, expresados en función de variables nodales, como son el voltaje y la corriente nodal.

$i_N = Y_N \times V_N$ expresa la corriente nodal en función de los voltajes nodales, $V_N = Z_N \times i_N$ expresa los voltajes nodales en función de las corrientes nodales, de la siguiente manera:

$i_N = Y_N \times V_N$ (Establece equilibrio de Corrientes nodales)

$V_N = Z_N \times i_N$ (Establece equilibrio de Voltajes nodales)

La matriz $[Y_N]$ (Establece la conectividad física de la red)

La matriz $[Z_N]$ (Establece la conectividad eléctrica entre cada uno de los nodos del sistema)

Tipos de formación de las matrices Y_{Bus} y Z_{Bus} :

- Para conformar la matriz $[Y_N]$ se emplean los siguientes procedimientos:
 - $Y_N = A^T Y_{pri} A$ (Donde: A = matriz incidencia elemento-nodo)
 - Algoritmo para la conformación de Y_N (No incluye acoplamientos mutuos)
 - * $Y_{kk} = \sum_{i=0}^n y_{ki}$ (i = nodos vecinos que conectan al nodo k)
 - * $Y_{ki} = -y_{ki}$ (y_{ki} - elementos primitivos)
 - * $Y_{ki} = 0$ (Si no existe elemento entre los nodos k - i)
- Para conformar la matriz $[Z_N]$ se emplea:

- $Z_N = [Y_N]^{-1}$ (Esta inversión se efectúa aplicando las técnicas de matrices dispersas y los factores LDU)
- Algoritmo con base en inyecciones de corriente.

7.2 Reducción de Nodos (Kron)

Esta reducción se lleva a cabo en arreglos matriciales en los cuales el respectivo valor nodal de la variable independiente es cero, condición que es necesaria para poder hacer este tipo de reducción.

Este procedimiento se aplica tanto en arreglos matriciales de la forma $i_N = Y_N V_N$ como en arreglos matriciales de la forma $V_N = Z_N i_N$. En los dos casos el procedimiento aplicado es el mismo y sirve para la eliminación de nodos. Esta forma de reducción de nodos es utilizado en la matriz Y_{Bus} en los casos en que el nodo que se desee eliminar tenga una inyección de corriente igual a cero, igualmente es utilizado en la matriz Z_{Bus} en los casos en que el nodo que se desee eliminar tenga un voltaje nodal igual a cero.

Este procedimiento se emplea para reducción de un solo nodo, cuando se trate de equivalentes de redes eléctricas, se emplean otros procedimientos basados en el proceso de eliminación Gaussiana.

Procedimiento seguido en la reducción de nodos.

$$\begin{bmatrix} I_A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{AA} & Y_{AB} \\ Y_{BA} & Y_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{AA} \end{bmatrix} V_A + \begin{bmatrix} Y_{AB} \end{bmatrix} V_B \quad (7.1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{BA} \end{bmatrix} V_A + \begin{bmatrix} Y_{BB} \end{bmatrix} V_B \quad (7.2)$$

De la ecuación 7.2 se obtiene:

$$V_B = - \begin{bmatrix} Y_{BB} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_{BA} \end{bmatrix} V_A$$

Reemplazando (7.2) en (7.1) se tendrá:

$$\begin{bmatrix} I_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{AA} \end{bmatrix} V_A - \begin{bmatrix} Y_{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{BB} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_{BA} \end{bmatrix} V_A$$

Al reunir variables comunes:

$$\begin{bmatrix} I_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{AA} - Y_{AB} & Y_{BB}^{-1} & Y_{BA} \end{bmatrix} V_A$$

La matriz equivalente obtenida es la siguiente:

$$Y'_{AA} = \begin{bmatrix} Y_{AA} - Y_{AB} & Y_{BB}^{-1} & Y_{BA} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: En la figura 7.1 se muestra un sistema de 4 nodos y en la cual la corriente nodal en el nodo 4 es cero. Se desea entonces eliminar dicho nodo.

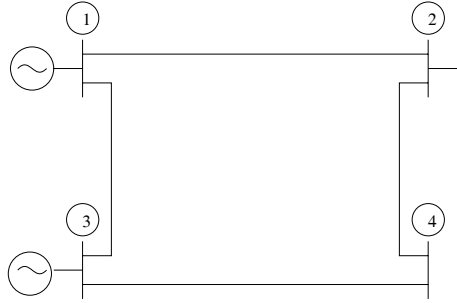


Figura 7.1: Red eléctrica de 4 nodos

cuya formulación matricial es de la forma:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

Se sabe que $i_4 = 0$, al reemplazar se obtiene entonces:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

Si se aplica la formulación descrita anteriormente se tiene:

$$Y_{AA} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} ; Y_{AB} = \begin{bmatrix} Y_{14} \\ Y_{24} \\ Y_{34} \end{bmatrix}$$

$$Y_{BA} = \begin{bmatrix} Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} \end{bmatrix} ; Y_{BB} = \begin{bmatrix} Y_{44} \end{bmatrix}$$

$$Y'_{AA} = \begin{bmatrix} Y_{AA} & - & Y_{AB}Y_{BB}^{-1}Y_{BA} \end{bmatrix}$$

$$Y_{AB}Y_{BB}^{-1}Y_{BA} = \begin{bmatrix} Y_{14} \\ Y_{24} \\ Y_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{Y_{44}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_{14}Y_{41}}{Y_{44}} & \frac{Y_{14}Y_{42}}{Y_{44}} & \frac{Y_{14}Y_{43}}{Y_{44}} \\ \frac{Y_{24}Y_{41}}{Y_{44}} & \frac{Y_{24}Y_{42}}{Y_{44}} & \frac{Y_{24}Y_{43}}{Y_{44}} \\ \frac{Y_{34}Y_{41}}{Y_{44}} & \frac{Y_{34}Y_{42}}{Y_{44}} & \frac{Y_{34}Y_{43}}{Y_{44}} \end{bmatrix}$$

$$Y'_{AA} = \begin{bmatrix} Y_{11} - \frac{Y_{14}Y_{41}}{Y_{44}} & Y_{12} - \frac{Y_{14}Y_{42}}{Y_{44}} & Y_{13} - \frac{Y_{14}Y_{43}}{Y_{44}} \\ Y_{21} - \frac{Y_{24}Y_{41}}{Y_{44}} & Y_{22} - \frac{Y_{24}Y_{42}}{Y_{44}} & Y_{23} - \frac{Y_{24}Y_{43}}{Y_{44}} \\ Y_{31} - \frac{Y_{34}Y_{41}}{Y_{44}} & Y_{32} - \frac{Y_{34}Y_{42}}{Y_{44}} & Y_{33} - \frac{Y_{34}Y_{43}}{Y_{44}} \end{bmatrix}$$

Observe como este procedimiento es sistematizable de la siguiente manera: se considera que k es el nodo a eliminar y el elemento (i,j) sera modificado $\Rightarrow Y'_{ij_{nuevo}} = Y'_{ij_{anterior}} - \frac{Y_{ik}Y_{kj}}{Y_{kk}}$

Ejercicio: Dado el sistema mostrado a continuación, se pide construir la matriz Y_{Bus} .

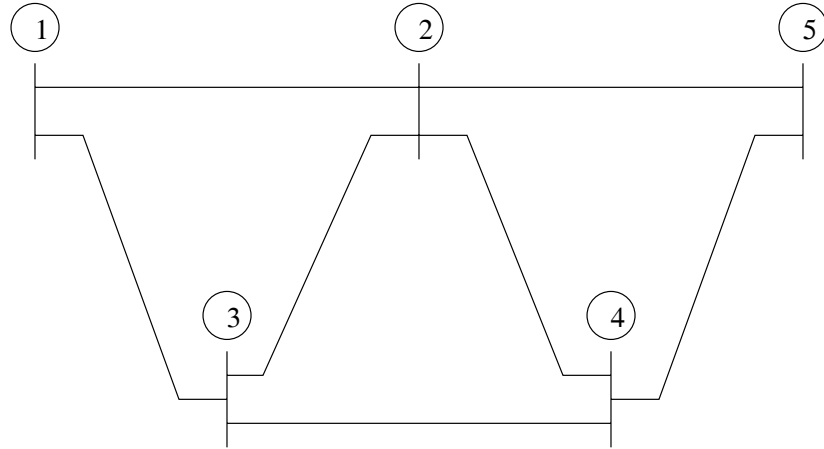


Figura 7.2: Red eléctrica de 5 nodos

Línea	R	X	$Y/2$
1 – 2	0,0316	0,2114	0,105
1 – 3	0,0152	0,0944	0,072
2 – 3	0,0121	0,0700	0,082
2 – 4	0,0140	0,1250	0,096
2 – 5	0,0230	0,055	0,043
3 – 4	0,0246	0,150	0,175
4 – 5	0,0102	0,170	0,202

7.3 Esquemas de ordenamiento nodal

El ordenamiento de las ecuaciones nodales tienen por objetivo el minimizar el número de nuevos elementos que puedan resultar al momento de efectuar procedimientos de inversión con dichas ecuaciones.

Las ecuaciones mencionadas anteriormente son del tipo $AX = b$, en estas la variable X corresponde a la incognita y es resuelta como sigue: $X = A^{-1}b$.

En el proceso de inversión de la matriz A algunas posiciones que antes eran cero pasarán a tomar un valor diferente de cero y son denominados elementos de relleno. Con el fin de minimizar el número de estos elementos las filas y columnas de la matriz A serán ordenadas antes de ser invertida.

Los primeros esquemas de ordenamiento para aplicaciones en Ingeniería Eléctrica fueron propuestos por W. Tinney y denominados por él mismo como Tinney I, II y III respectivamente.

En el siguiente ejemplo se muestra como el ordenamiento de los nodos afecta el proceso de inversión introduciendo los denominados elementos de relleno.

Caso 1: Sistema sin ordenamiento nodal

La figura 7.3 presenta una red de 5 nodos sin ordenamiento nodal previo.

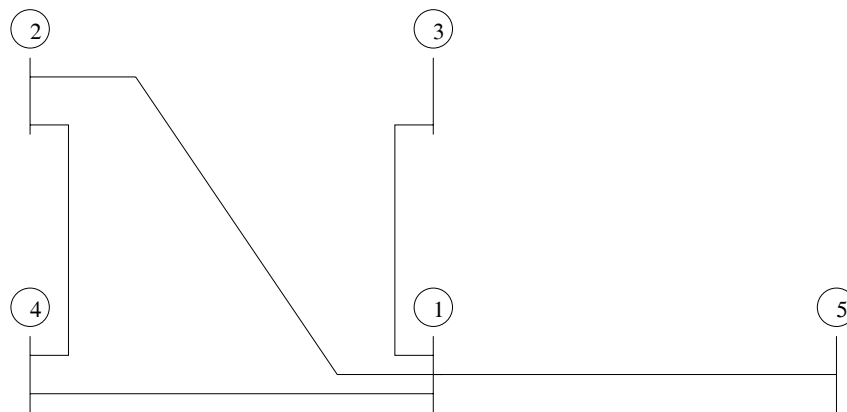


Figura 7.3: Red eléctrica sin ordenamiento nodal

La estructura física del sistema anterior es representada en la siguiente matriz:

1	x	x	x	x	x
2	x	x		x	
3	x		x		
4	x	x		x	
5	x				x

Al invertir la matriz anterior se observa que en algunas posiciones donde antes se tenía cero, aparece ahora un elemento diferente de cero.

En el cuadro se muestran las posiciones que en algún momento del proceso son diferentes de cero (Solo se representan las posiciones de la matriz triangular superior).

1	x	x	x	x	x
2	x	x	*	x	*
3	x		x	*	*
4	x	x		x	*
5	x				x

Caso 2: Sistema con ordenamiento.

La figura 7.4 corresponde a la figura 7.3 después de efectuar un procedimiento de ordenamiento nodal.

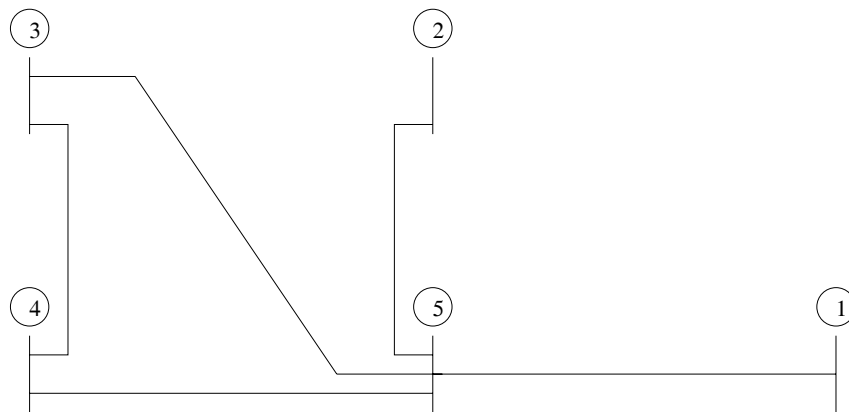


Figura 7.4: Red eléctrica con ordenamiento nodal

La estructura física representada en una matriz es como sigue:

1	x				x
2		x			x
3			x	x	x
4			x	x	x
5	x	x	x	x	x

Invertida la matriz anterior las posiciones diferentes de cero son las mostradas en la matriz

1	x				x
2		x			x
3			x	x	x
4			x	x	x
5	x	x	x	x	x

En este caso después de ordenar los nodos no aparecen elementos de relleno. Este no es el caso general de las redes eléctricas en los cuales a pesar de que se efectúe un ordenamiento óptimo aparecerán elementos de relleno. Lo que se trata entonces es de minimizar el número de éstos elementos. Un tipo de estructura especial son las redes radiales, en éstas después de efectuado el ordenamiento óptimo no aparecen elementos de relleno, este concepto se extiende a cualquier tipo de red cuya estructura sea radial.

7.4 Factorización triangular

Este procedimiento es frecuentemente utilizado en el estudio de sistemas de Potencia de gran escala. Debido al gran tamaño que presentan los arreglos matriciales, es necesario considerar un método efectivo para la inversión de las matrices. Este procedimiento es aplicado junto con el de las matrices dispersas, característica propia de las matrices en el estudio de las redes electricas.

Frecuentemente en los estudios, los parámetros y configuración están fijos y las condiciones de operación difieren debido a cambios que se presentan en las fuentes externas. Se aprovecha entonces el hecho de que las matrices permanecen invariantes y solo varía el vector independiente.

Los modelos matemáticos planteados son arreglos matriciales. Un modelo matemático básico linealizado es: $i_{bus} = Y_{bus}V_{bus}$, en este caso, conocido el vector de corrientes se calcula el vector de voltajes, por lo tanto es necesario invertir la matriz Y_{bus} . Esta matriz es descompuesta en los factores LU facilitando su inversión: $Y_{bus} = LU$

Como ejemplo se representa un sistema de 4 nodos:

$$L = \begin{bmatrix} Y_{11} & & & \\ Y_{21} & Y_{22}^{(1)} & & \\ Y_{31} & Y_{32}^{(1)} & Y_{33}^{(2)} & \\ Y_{41} & Y_{42}^{(1)} & Y_{43}^{(2)} & Y_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{Y_{12}}{Y_{11}} & \frac{Y_{13}}{Y_{11}} & \frac{Y_{14}}{Y_{11}} \\ & 1 & \frac{Y_{23}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}} & \frac{Y_{24}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}} \\ & & 1 & \frac{Y_{34}^{(2)}}{Y_{33}^{(2)}} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Siendo las matrices L y U: factores triangulares inferior y superior de Y_{bus} y con la propiedad de que el producto de estos factores es igual a Y_{bus} .

Al proceso de encontrar L y U se le denomina factorización.

Ejemplo: Determinar los factores LU para un sistema de 4 nodos.

$$Y_{barra} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Primer paso:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{Y_{12}}{Y_{11}} & \frac{Y_{13}}{Y_{11}} & \frac{Y_{14}}{Y_{11}} \\ 0 & Y_{22}^{(1)} & Y_{23}^{(1)} & Y_{24}^{(1)} \\ 0 & Y_{32}^{(1)} & Y_{33}^{(1)} & Y_{34}^{(1)} \\ 0 & Y_{42}^{(1)} & Y_{43}^{(1)} & Y_{44}^{(1)} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} Y_{11} & & & \\ Y_{21} & & & \\ Y_{31} & & & \\ Y_{41} & & & \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{Y_{12}}{Y_{11}} & \frac{Y_{13}}{Y_{11}} & \frac{Y_{14}}{Y_{11}} \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Segundo paso:

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & \\ & 1 & \frac{Y_{23}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}} & \frac{Y_{24}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}} \\ & 0 & Y_{33}^{(2)} & Y_{34}^{(2)} \\ & 0 & Y_{43}^{(2)} & Y_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} Y_{11} & & & \\ Y_{21} & Y_{22}^{(1)} & & \\ Y_{31} & Y_{31}^{(1)} & & \\ Y_{41} & Y_{42}^{(1)} & & \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{Y_{12}}{Y_{11}} & \frac{Y_{13}}{Y_{11}} & \frac{Y_{14}}{Y_{11}} \\ & 1 & \frac{Y_{11}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}} & \frac{Y_{11}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}} \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Tercer paso:

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & 1 & \frac{Y_{34}^{(2)}}{Y_{33}^{(2)}} \\ & & 0 & Y_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} Y_{11} & & & \\ Y_{21} & Y_{22}^{(1)} & & \\ Y_{31} & Y_{32}^{(1)} & Y_{33}^{(2)} & \\ Y_{41} & Y_{42}^{(1)} & Y_{43}^{(2)} & \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{Y_{12}}{Y_{11}} & \frac{Y_{13}}{Y_{11}} & \frac{Y_{14}}{Y_{11}} \\ & 1 & \frac{Y_{11}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}} & \frac{Y_{11}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}} \\ & & 1 & \frac{Y_{11}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}} \\ & & & \end{bmatrix}$$

Cuarto paso:

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} Y_{11} & & & \\ Y_{21} & Y_{22}^{(1)} & & \\ Y_{31} & Y_{32}^{(1)} & Y_{33}^{(2)} & \\ Y_{41} & Y_{42}^{(1)} & Y_{43}^{(2)} & Y_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{Y_{12}}{Y_{11}} & \frac{Y_{13}}{Y_{11}} & \frac{Y_{14}}{Y_{11}} \\ & 1 & \frac{Y_{23}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}} & \frac{Y_{24}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}} \\ & & 1 & \frac{Y_{34}^{(2)}}{Y_{33}^{(2)}} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Procedimiento de solución

$$\begin{aligned} LUV &= I \\ UV &= X(\text{Suponer}) \\ LX &= I(\text{Se determina } X) \\ UV &= X(\text{Se determina } V) \end{aligned}$$

Si Y_{Bus} es simétrica (como es el caso de los sistemas eléctricos) $\Rightarrow L = U^T D$

D: Matriz diagonal que contiene los elementos de la diagonal de L $\Rightarrow Y_{Barra} = U^T D U$

7.5 Descomposición de Cholesky

Frecuentemente los sistemas son representados mediante modelos lineales, un ejemplo de ello es el flujo de carga *DC*, o mediante modelos no lineales que posteriormente son linealizados al rededor de un punto de operación, como es el caso del flujo de carga A.C., resuelto con el método de Newton Raphson.

Los modelos lineales planteados en forma matricial son expresados así:

$$[B] \cdot [\theta] = [P] \quad (7.3)$$

La solución de la variable de estado $[\theta]$ es encontrada mediante el producto de la inversa de la matriz $[B]$ por el vector P . La inversa de la matriz es posible si el sistema de ecuaciones es linealmente independiente.

$$[\theta] = [B]^{-1} \cdot [P] \quad (7.4)$$

La inversa de una matriz tiene un elevado costo computacional llevando en cuenta el gran número de operaciones y requerimiento de memoria.

Entre las soluciones a este inconveniente estan el ordenamiento de las ecuaciones, el almacenamiento compacto de la información y los procedimientos de descomposición. Estos últimos consisten en almacenar en matrices triangulares los registros de memoria de la inversa de la matriz.

- Triangular superior (eliminación progresiva)

- Triangular inferior (eliminación regresiva)

Existen múltiples esquemas de factorización entre ellos se destacan dos para aplicaciones en ingeniería eléctrica la *descomposición LDU* y la *descomposición de Cholesky*.

El primero tiene un carácter general y se obtiene registrando sistemáticamente los cálculos del proceso de eliminación gaussiana.

El segundo procedimiento es más rápido y eficiente computacionalmente pero requiere que la matriz tenga algunas propiedades particulares a saber:

- Simétrica
- Semi-definida positiva.

Se dice que una matriz $[B]$ es semidefinida positiva cuando:

$$[X]^T \cdot [B] \cdot [X] > 0 \quad \forall x_i \neq 0 \quad (7.5)$$

Esta propiedad la cumple la matriz $[B]$ que es utilizada en la solución del flujo DC.

El objetivo es descomponer la matriz $[B]$ como el producto de una matriz triangular inferior $[C]$ por su transpuesta $[C]^T$ donde todos los elementos de la diagonal son positivos.

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1N} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ B_{N1} & B_{N2} & \cdots & B_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & & & \\ C_{21} & C_{22} & & \\ \vdots & & & \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ & C_{22} & \cdots & C_{2N} \\ & & & \vdots \\ & & & C_{NN} \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

Modo de solución:

$$B_{11} = C_{11} \cdot C_{11} \text{ de donde es posible encontrar } C_{11} = (B_{11})^{1/2}$$

Los siguientes elementos de la columna 1 pueden ser encontrados de forma análoga:

$$B_{21} = B_{12} = C_{21} \cdot C_{11} + C_{22} \cdot (0) \text{ de donde } C_{21} = \frac{B_{21}}{C_{11}}$$

$$B_{31} = B_{13} = C_{31} \cdot C_{11} + C_{32} \cdot (0) + C_{33} \cdot (0) \text{ de donde } C_{31} = \frac{B_{31}}{C_{11}}$$

El proceso continua de igual forma para los elementos de las columnas 2,3,...N.

Ejemplo: En la figura 7.5 se muestra un sistema de 5 barras y en el cual el nodo 5 se asume como slack.

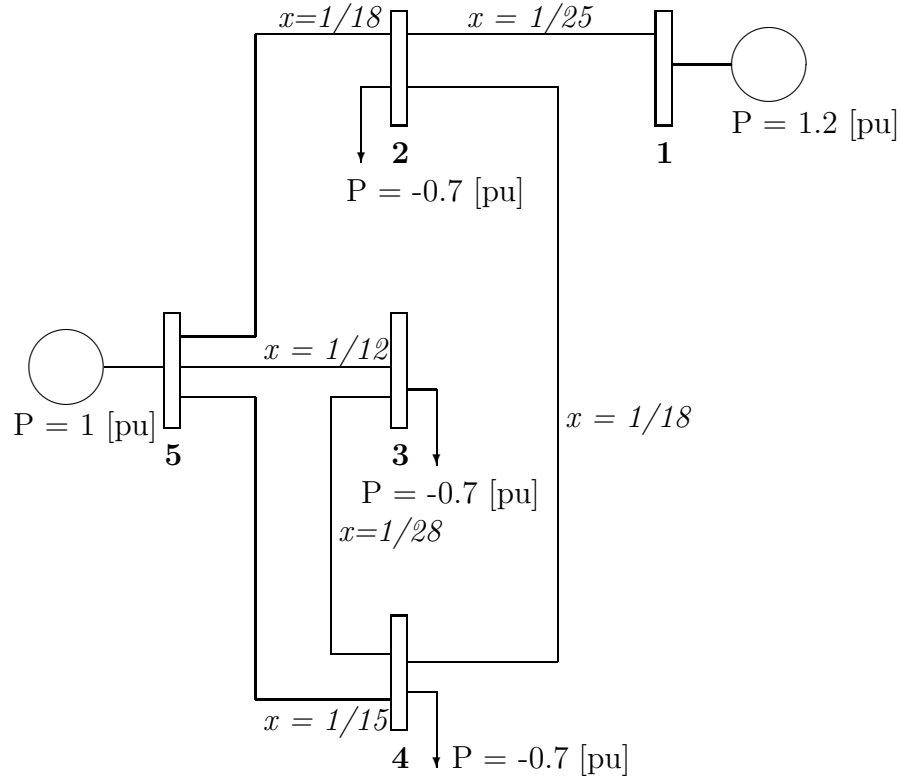


Figura 7.5: Red eléctrica de 5 nodos

Se desea calcular los ángulos usando un modelo de flujo de carga *DC*. Para ello se requiere construir la matriz $[B]$ y descomponerla usando el método de factorización de Cholesky. Finalmente a partir de las matrices triangulares es posible obtener los ángulos sin recurrir a la inversa directamente.

El proceso de factorización es como sigue:

$$\begin{pmatrix} 25 & -25 & 0 & 0 \\ -25 & 61 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 49 & 28 \\ 0 & -18 & 28 & 61 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & & & \\ C_{21} & C_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ & C_{22} & \cdots & C_{2N} \\ & & \ddots & \\ & & & C_{NN} \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Los términos c_{ij} se calculan igualando los términos de la matriz del lado izquierdo con los términos resultantes del lado derecho y lo cual es obtenido siguiendo el siguiente procedimiento:

$$\begin{array}{llll}
25 & = & C_{11} \cdot C_{11} & \Rightarrow C_{11} = 5 \\
-25 & = & C_{11} \cdot C_{21} & \Rightarrow C_{21} = -5 \\
0 & = & C_{11} \cdot C_{31} & \Rightarrow C_{31} = 0 \\
0 & = & C_{11} \cdot C_{41} & \Rightarrow C_{41} = 0 \\
61 & = & C_{21} \cdot C_{21} + C_{22} \cdot C_{22} & \Rightarrow C_{22} = 6 \\
0 & = & C_{31} \cdot C_{21} + C_{32} \cdot C_{22} & \Rightarrow C_{32} = 0 \\
-18 & = & C_{41} \cdot C_{21} + C_{42} \cdot C_{22} & \Rightarrow C_{42} = 0 \\
49 & = & C_{31} \cdot C_{31} + C_{32} \cdot C_{32} + C_{33} \cdot C_{33} & \Rightarrow C_{31} = 0 \\
-18 & = & C_{31} \cdot C_{41} + C_{32} \cdot C_{42} + C_{33} \cdot C_{43} & \Rightarrow C_{43} = -4 \\
61 & = & C_{41} \cdot C_{41} + C_{42} \cdot C_{42} + C_{43} \cdot C_{43} + C_{44} \cdot C_{44} & \Rightarrow C_{44} = 6
\end{array} \tag{7.8}$$

para encontrar los ángulos se procede a la eliminación progresiva:

$$[P] = [C] \cdot [C]^T \cdot [\theta] \tag{7.9}$$

definiendo

$$[U] = [C]^T \cdot [\theta] \tag{7.10}$$

se tiene

$$[P] = [C] \cdot [U] \tag{7.11}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} \frac{6}{25} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{-1}{10} \\ \frac{-19}{120} \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

de igual forma se puede obtener el vector de ángulos $[\theta]$:

$$[U] = \begin{bmatrix} 0,048694 \\ 0,000694 \\ -0,029360 \\ -0,026389 \end{bmatrix} \tag{7.13}$$

La factorización de Cholesky presenta un menor esfuerzo computacional frente a la factorización LDU. No obstante su aplicación está restringida a matrices simétricas y semi definidas positivas.

Como es característico en los sistemas eléctricos la matriz $[B]$ presenta características de dispersidad que en conjunto con la técnica de factorización triangular pueden acelerar los cálculos y disminuir los requerimientos de memoria computacional.

Se dice que una matriz es dispersa cuando la mayor parte de sus elementos son cero.

El grado de dispersidad puede ser representado por medio de un valor que relacione la cantidad de elementos con valor cero con respecto a la cantidad total de elementos. En grandes sistemas de potencia el grado de dispersidad es mayor al 95 % aumentado a medida que aumenta el sistema de tamaño.

Existen múltiples técnicas de dispersidad, las cuales deben cumplir tres principios básicos:

- Minimizar la cantidad de datos almacenados (requerimientos de memoria)
- Minimizar el número de operaciones realizadas (Tiempo de cálculo)
- Preservar la dispersidad.

La filosofía base es almacenar sólo los elementos no nulos de la matriz, estos elementos pueden ser reunidos en un conjunto de vectores que contengan la información necesaria para ubicar la posición del elemento en la matriz así como el dato mismo.

El uso de uno u otro esquema de dispersidad depende del problema en particular y de características tales como:

- Simetría de la matriz.
- Necesidad de alterar la estructura de la matriz.
- Necesidad de memoria o velocidad de cálculo.

Para hacer más eficiente un programa de flujo de carga deben utilizarse de forma combinada las técnicas de dispersidad, ordenamiento nodal y factorización triangular.

7.6 Cálculo de la matriz Z_{BUS} mediante el proceso de factorización LDU

Se pueden calcular fácilmente conforme se necesiten los elementos de Z_{Bus} , así por ejemplo, aplicaciones en corto circuito en el nodo m , en el que sólo se requiere de la columna m de la matriz Z_{Bus} .

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \\ \vdots \\ n \end{matrix} \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1m} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2m} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Z_{m1} & Z_{m2} & \cdots & Z_{mm} & \cdots & Z_{mn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nm} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{1m} \\ Z_{2m} \\ \vdots \\ Z_{mm} \\ \vdots \\ Z_{nm} \end{bmatrix}$$

El producto: $Y_{Bus} * Z_{Bus} = I$ (matriz identidad)

$$Y_{Bus} * Z_{Bus} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \ m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = Y_{Bus} \cdot Z_{Bus}^{(m)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \ m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si L y U fueron calculadas según fue explicado anteriormente,

$$LUZ_{Bus}^{(m)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \ m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Se desean calcular los elementos de la columna 3 de la matriz Z_{Bus} de un sistema de 4 nodos.

$$\begin{bmatrix} L_{11} & & & \\ L_{21} & L_{22} & & \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & 1 & u_{23} & u_{24} \\ & & 1 & u_{34} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{13} \\ Z_{23} \\ Z_{33} \\ Z_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este vector columna Z_{bus}^3 puede ser resuelto en 2 etapas en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & & & \\ L_{21} & L_{22} & & \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al resolver:

$$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = \frac{l}{L_{33}}, X_4 = -\frac{L_{43}}{L_{44} \cdot L_{33}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & 1 & u_{23} & u_{24} \\ & & 1 & u_{34} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{13} \\ Z_{23} \\ Z_{33} \\ Z_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

Al resolver:

$$Z_{43} = X_4, Z_{33} = X_3 - u_{34}Z_{43}$$

Si solo requiere estos elementos detiene el proceso, caso contrario continúa el cálculo.

$$Z_{23} = X_2 - u_{23}Z_{33} = X_3 - u_{24}Z_{43}$$

$$Z_{13} = X_1 - u_{12}Z_{23} - u_{13}Z_{33} - u_{14}Z_{43}$$

En algunas aplicaciones es necesario el cálculo de términos del tipo $(Z_{im} - Z_{in})$ que involucran restas de las columnas m y n de Z_{bus}

$$LUZ_{Barra}^{(m-n)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ +1 \ m \\ \vdots \\ -1 \ n \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Donde: } Z_{Bus}^{(m-n)} = Z_{Bus}^{(m)} - Z_{Bus}^{(n)}$$

7.7 Corrección de la Y_{Bus} por efectos mutuos

El análisis se extiende a 2 ramas mutuamente acopladas que son parte de una red más grande, pero que no están acopladas a ninguna otra rama.

La impedancia $Z_a \Rightarrow$ conectada entre (m) y (n)

La impedancia $Z_b \Rightarrow$ conectada entre (p) y (q)

Están acopladas a través de Z_M

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a & Z_M \\ Z_M & Z_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}$$

Caidas de voltaje debido a las corrientes de rama.

(i_a e i_b entran por los terminales señalados con punto)

$$\begin{bmatrix} Z_a & Z_M \\ Z_M & Z_b \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{Z_a Z_b - Z_M^2} \begin{bmatrix} Z_b & -Z_M \\ -Z_M & Z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_a & Y_M \\ Y_M & Y_b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_a & Y_M \\ Y_M & Y_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}$$

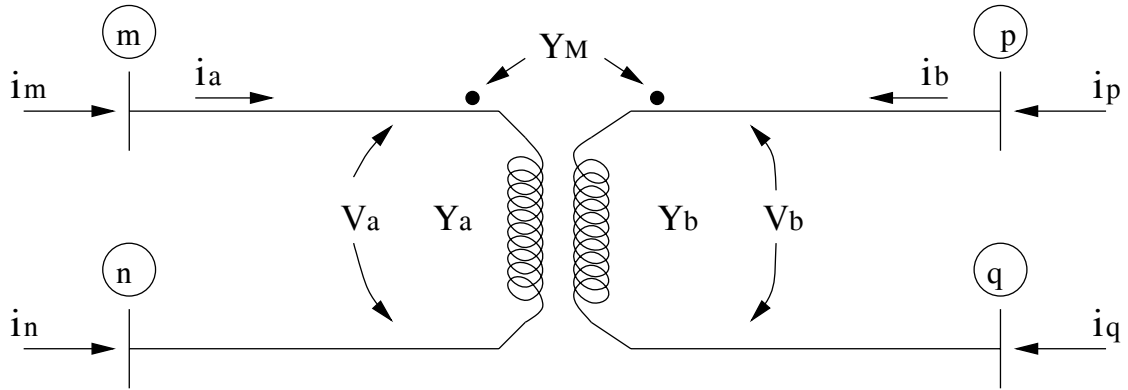


Figura 7.6: Corrección por efectos mutuos en la Y_{Bus}

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_m & -V_n \\ V_p & V_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_m \\ V_n \\ V_p \\ V_q \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} V_m \\ V_n \\ V_p \\ V_q \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_m \\ i_n \\ i_p \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \\ q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}$$

Se conoce que:

$$\begin{bmatrix} Y_a & Y_M \\ Y_M & Y_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_a & Y_M \\ Y_M & Y_b \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} V_m \\ V_n \\ V_p \\ V_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}$$

$$A^T \begin{bmatrix} Y_a & Y_M \\ Y_M & Y_b \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} V_m \\ V_n \\ V_p \\ V_q \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}$$

$$A^T \begin{bmatrix} Y_a & Y_M \\ Y_M & Y_b \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} V_m \\ V_n \\ V_p \\ V_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_m \\ i_n \\ i_p \\ i_q \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} m \\ n \\ p \\ q \end{matrix} \begin{bmatrix} Y_a & -Y_a & Y_M & -Y_M \\ -Y_a & Y_a & -Y_M & Y_M \\ Y_M & -Y_M & Y_b & -Y_b \\ -Y_M & Y_M & -Y_b & Y_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_m \\ V_n \\ V_p \\ V_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_m \\ i_n \\ i_p \\ i_q \end{bmatrix}$$

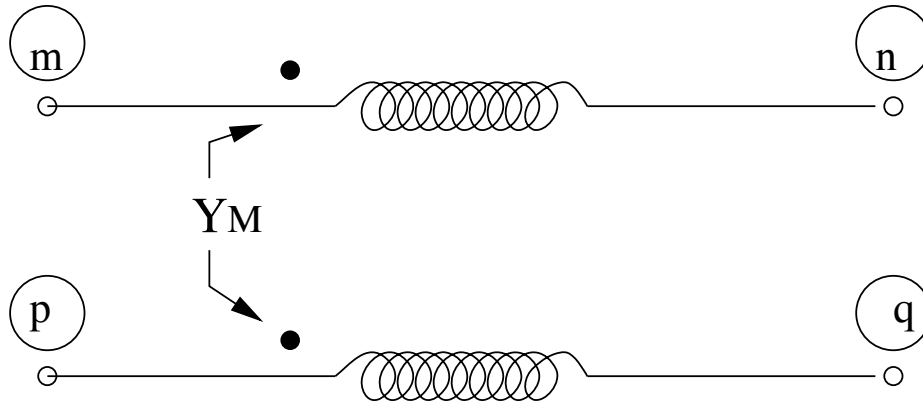


Figura 7.7: Corrección por efectos mutuos en la Y_{Bus}

7.8 Método manual para la construcción de la matriz Z_{Bus}

Este método está basado en inyecciones de corriente nodal y es explicado de la siguiente forma: Se inyecta una corriente en un nodo y se calculan los voltajes de cada nodo de la red respecto a

un nodo seleccionado como referencia. Esta inyección de corriente nodal produce una variación de voltaje nodal, la relación de las variaciones de voltaje y de corriente nodal inyectada es expresado de la siguiente manera: $\frac{\partial E_i}{\partial i_j} = \frac{\Delta E_i}{\Delta i_j}$.

La expresión anterior corresponde a los términos Z_{ij} de la matriz Z_{bus} , concepto básico aplicado en este procedimiento.

El concepto se aplica entonces de la siguiente forma: Al inyectar una corriente de 1 amperio en el nodo j, se presenta una elevación de tensión en todos los nodos del sistema, que es interpretado de la siguiente manera:

$$Z_{ij} = Z_{ji} = \frac{\Delta E_i}{1}$$

Ejemplo: Construir la matriz Z_{bus} para el sistema mostrado en la figura 7.8, utilizando para esto el método de inyección de corriente.

El método inicia inyectando una corriente de 1 amperio en el nodo 1 y calculando los voltajes respecto a tierra de cada uno de los nodos. Al aplicar la relación del voltaje nodal calculado y la inyección de corriente de 1 amperio en el nodo 1 se determinan los elementos de la columna (fila) 1 de la matriz Z_{Bus} . El proceso continua inyectando la fuente de corriente de 1 amperio en todos los nodos y calculando los voltajes respecto a tierra en todos los nodos de la red. Al establecer la relación Voltaje de barra / corriente de barra se determina Z_{Barra}

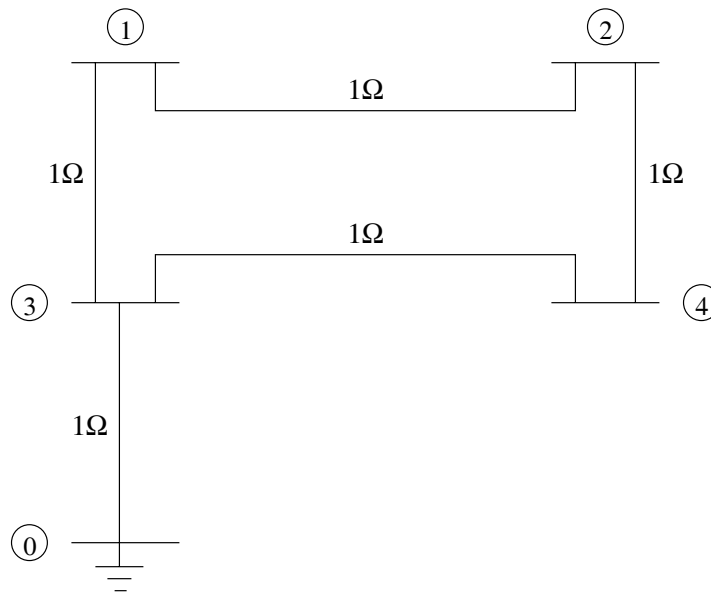


Figura 7.8: Red eléctrica

Determinación de los elementos $(Z_{11}, Z_{21}, Z_{31}, Z_{41})$ de la matriz Z_{bus} inyectando una corriente de 1 A en el nodo (1).

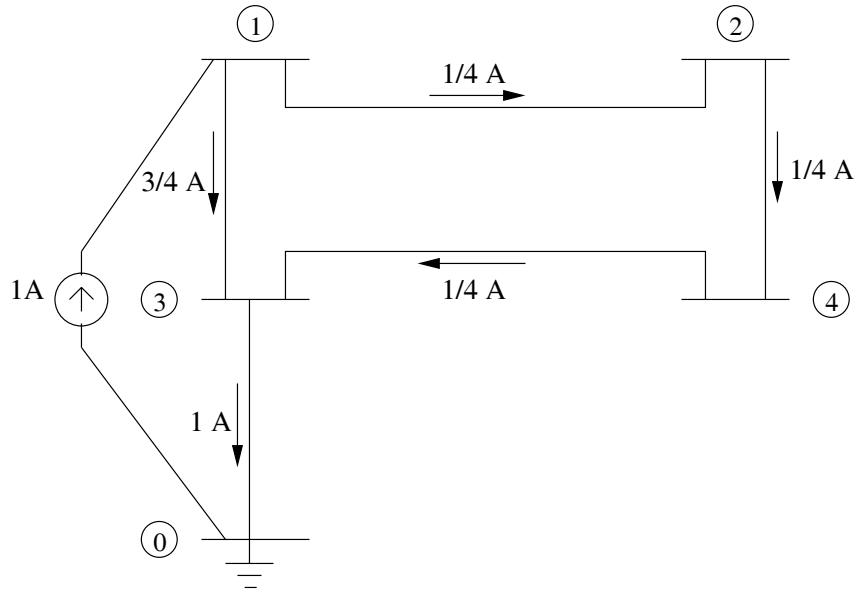


Figura 7.9: Red eléctrica con inyección de corriente en el nodo 1

$$\begin{aligned}
 V_1 &= 1\frac{3}{4}V \Rightarrow Z_{11} = 1\frac{3}{4}\Omega \\
 V_2 &= 1\frac{1}{2}V \Rightarrow Z_{21} = 1\frac{1}{2}\Omega \\
 V_3 &= 1V \Rightarrow Z_{31} = 1\Omega \\
 V_4 &= 1\frac{1}{4}V \Rightarrow Z_{41} = 1\frac{1}{4}\Omega
 \end{aligned}$$

Determinación de los elementos $(Z_{12}, Z_{22}, Z_{32}, Z_{42})$ de la matriz Z_{bus} inyectando una corriente de 1 A en el nodo (2).

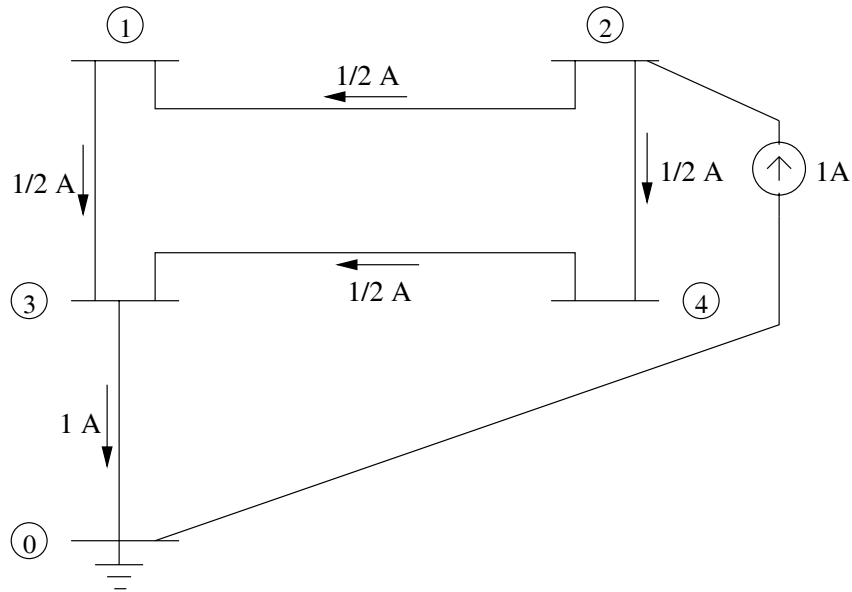


Figura 7.10: Red eléctrica con inyección de corriente en el nodo 2

$$\begin{aligned}
V_1 = 1\frac{1}{2}V &\Rightarrow Z_{12} = 1\frac{1}{2}\Omega \\
V_2 = 2V &\Rightarrow Z_{22} = 2\Omega \\
V_3 = 1V &\Rightarrow Z_{32} = 1\Omega \\
V_4 = 1\frac{1}{2}V &\Rightarrow Z_{42} = 1\frac{1}{2}\Omega
\end{aligned}$$

Determinación de los elementos $(Z_{13}, Z_{23}, Z_{33}, Z_{43})$ de la matriz Z_{bus} inyectando una corriente de 1 A en el nodo (3).

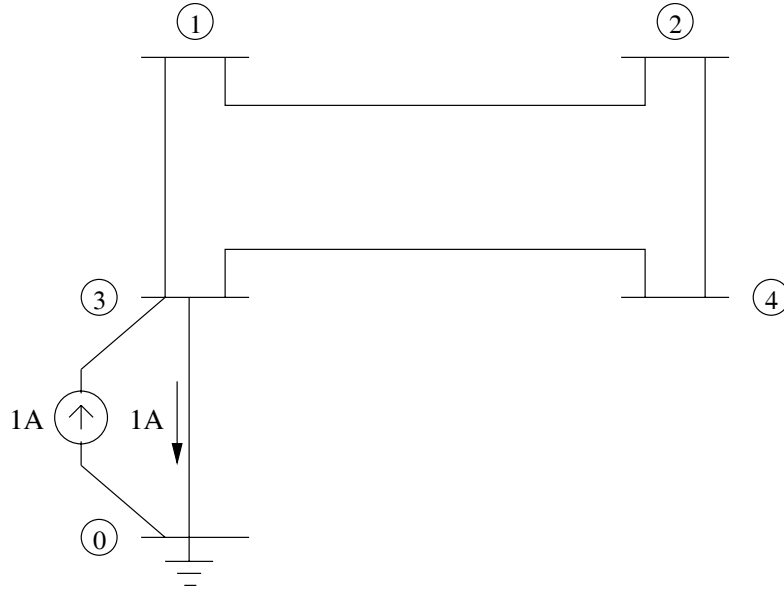


Figura 7.11: Red eléctrica con inyección de corriente en el nodo 3

$$\begin{aligned}
V_1 = 1V &\Rightarrow Z_{13} = 1\Omega \\
V_2 = 1V &\Rightarrow Z_{23} = 1\Omega \\
V_3 = 1V &\Rightarrow Z_{33} = 1\Omega \\
V_4 = 1V &\Rightarrow Z_{43} = 1\Omega
\end{aligned}$$

Determinación de los elementos $(Z_{14}, Z_{24}, Z_{34}, Z_{44})$ de la matriz Z_{bus} inyectando una corriente de 1 A en el nodo (4).

$$\begin{aligned}
V_1 = 1\frac{1}{4}V &\Rightarrow Z_{14} = 1\frac{1}{4}\Omega \\
V_2 = 1\frac{1}{2}V &\Rightarrow Z_{24} = 1\frac{1}{2}\Omega \\
V_3 = 1V &\Rightarrow Z_{34} = 1\Omega \\
V_4 = 1\frac{3}{4}V &\Rightarrow Z_{44} = 1\frac{3}{4}\Omega
\end{aligned}$$

Resultado del procedimiento de la formación de la matriz Z_{bus} empleando el método basado en inyecciones de corriente:

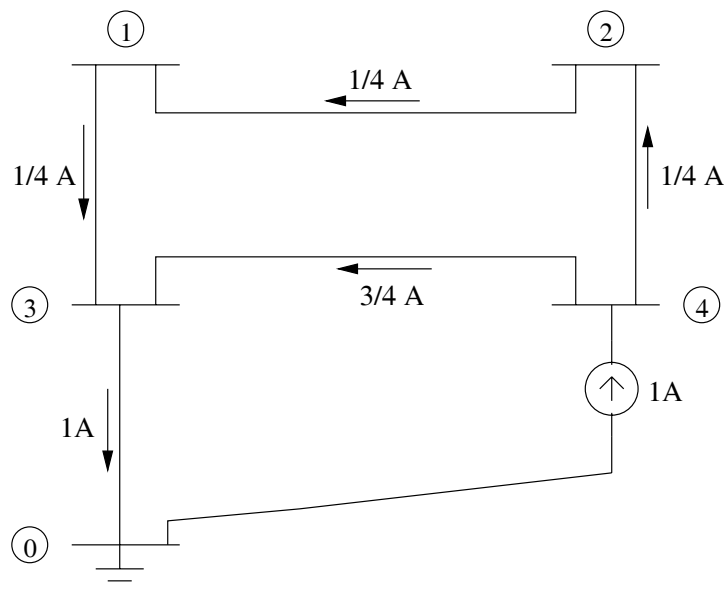


Figura 7.12: Red eléctrica con inyección de corriente en el nodo 4

$$Z_{Bus} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1\frac{3}{4} & 1\frac{1}{2} & 1 & 1\frac{1}{4} \\ 1\frac{1}{2} & 2 & 1 & 1\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1\frac{1}{4} & 1\frac{1}{2} & 1 & 1\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Características de la Matriz Z_{bus} : Con base en los resultados anteriores se concluyen las siguientes características

- Concepto básico: $Z_{ij} = \frac{\Delta E_i}{\Delta i_j}$
- Matriz simétrica
- Matriz dominante
- Matriz NO Dispersa
- Matriz compleja (real e imaginaria)
- Necesita de la referencia para su construcción

7.9 Algoritmo para la formación de la Z_{Bus}

Este algoritmo se fundamenta en el método inyecciones de corriente. En este se inyecta una corriente en el nodo (i) y se miden voltajes nodales que resultan de esta inyección en todos

los nodos del sistema, la relación voltaje nodal/corriente nodal representa los elementos de la matriz Z_{bus} .

Para su sistematización se establece un procedimiento de forma ordenada con varias reglas básicas que deberán ser cumplidas durante el desarrollo del mismo y son las siguientes:

- La matriz Z_{bus} será conformada paso a paso por lo cual los elementos son instalados uno a la vez, el proceso termina cuando todos los elementos de la red hayan sido instalados.

Respecto al elemento que va a ser instalado podrían presentarse dos situaciones: Que el elemento sea radial (no cierre malla), que el elemento sea un enlace (cierre malla). Cada alternativa de estos tendrá su propio desarrollo.

Además de lo anterior se deberá contemplar la posibilidad de que el elemento a instalar esté acoplado con alguno(s) de los elementos previamente ensamblados.

- El primer elemento instalado deberá estar conectado a referencia. Esto con el fin de que al inyectar la corriente en cualquier nodo se tenga retorno a tierra.
- En la medida en que se instalan elementos deberá observarse que no se presenten sistemas aislados, quiere decir que la red instalada en todo momento no deberá presentar zonas no conectadas.
- Cada vez que se instala un nuevo elemento deberá conformarse la matriz Z primitiva con los elementos previamente instalados, incluido además el elemento a instalar, con esta se obtendrá la matriz Y primitiva.

Aquí se deberá tener especial cuidado en la inversión de la matriz Z primitiva, particionando la matriz en elementos acoplados y no acoplados para facilitar el proceso de inversión.

- Al instalar un elemento se determina si el mismo es del tipo radial o enlace y si posee acoplamientos con elementos previamente ensamblados, a fin de establecer la ecuación correspondiente.

Seguidamente se desarrollan los procedimientos para estos dos tipos de elementos.

7.9.1 Elemento radial sin acoplamiento mutuo

Este nuevo elemento será instalado entre un nodo existente y un nuevo nodo. Por lo tanto, al ser instalado este nuevo elemento en el sistema, la matriz Z_{bus} es ampliada en una fila y una columna, correspondiente al nuevo nodo.

El proceso por medio del cual se determinan los nuevos elementos (fila y columna) de la matriz Z_{bus} es descrito a continuación.

Procedimiento para instalar el elemento (p-q) en el sistema, siendo p un nodo previamente instalado y q el nuevo nodo.

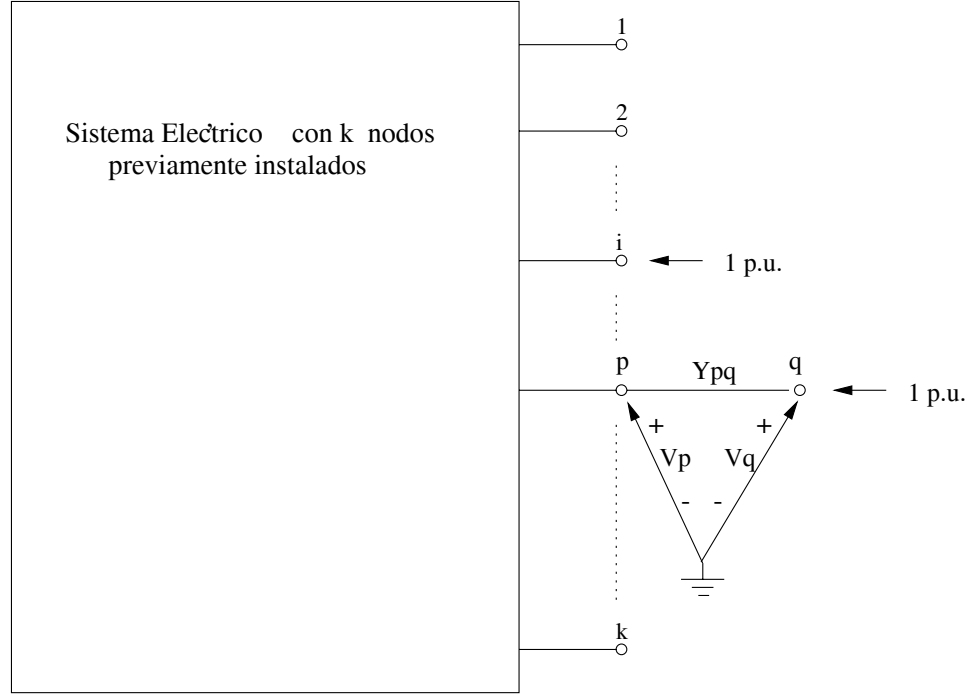


Figura 7.13: Instalación del elemento radial p-q sin acoplamiento mutuo

Los elementos de la nueva fila y nueva columna son denominados como elementos de la diagonal y fuera de la diagonal. Así se determinan las ecuaciones para los elementos de la Z_{Bus} de la diagonal y fuera de la diagonal de la siguiente manera:

- **Elementos fuera de la diagonal**

Se inyecta una corriente de 1 p.u. en el nodo i y se procede así:

Suma de voltajes en la nueva rama ensamblada: $V_q - V_p = 0 \Rightarrow V_q = V_p$

Por definición se conoce que: $Z_{qi} = \frac{V_q}{i_i}$ y $Z_{pi} = \frac{V_p}{i_i}$

Entonces se concluye que: $Z_{qi} = Z_{pi}$

- **Elemento de la diagonal**

Se inyecta una corriente de 1 p.u. en el nodo q y se procede así:

Suma de voltajes en la nueva rama ensamblada: $V_q - \frac{1}{Y_{pq}} - V_p = 0$

Al despejar el voltaje del nodo q se obtiene: $V_q = V_p + \frac{1}{Y_{pq}}$

Por definición se sabe que: $Z_{qq} = \frac{V_q}{i_q}$ y $Z_{pq} = \frac{V_p}{i_q}$

Al dividir la ecuación de voltaje nodal por la corriente nodal q se tiene: $\frac{V_q}{i_q} = \frac{V_p}{i_q} + \frac{1}{Y_{pq}}$

Entonces se concluye que: $Z_{qq} = Z_{pq} + \frac{1}{Y_{pq}}$

Seguidamente se muestra la estructura de la matriz Z_{bus} despues de que a sido instalado el nuevo elemento (p-q).

$$Z_{bus} = \begin{array}{c|cccccc|c} & & & & p & & q \\ \hline 1 & Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1p} & \cdots & Z_{1k} & Z_{1q} \\ 2 & Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2p} & \cdots & Z_{2k} & Z_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ p & Z_{p1} & Z_{p2} & \cdots & Z_{pp} & \cdots & Z_{pk} & Z_{pq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ k & Z_{k1} & Z_{k2} & \cdots & Z_{kp} & \cdots & Z_{kk} & Z_{kq} \\ \hline q & Z_{q1} & Z_{q2} & \cdots & Z_{qp} & \cdots & Z_{qk} & Z_{qq} \end{array}$$

Ejemplo: Emplear el algoritmo para la formación de la matriz Z_{bus} para elementos radiales y sin acoplamiento mutuo, para el sistema radial de 5 nodos mostrado en la figura 7.14

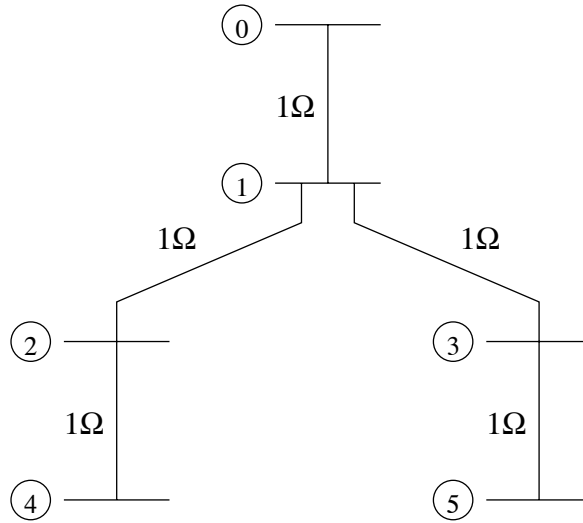


Figura 7.14: Red radial de 5 nodos

El resultado que se obtiene de aplicar el algoritmo para la formación de la matriz Z_{bus} es el siguiente:

$$Z_{bus} = \begin{array}{c|cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

7.9.2 Elemento de enlace sin acoplamiento mutuo

Este es el procedimiento que se sigue en la instalación de elementos identificados con los nodos (p-q) en el sistema, siendo p y q nodos previamente instalados.

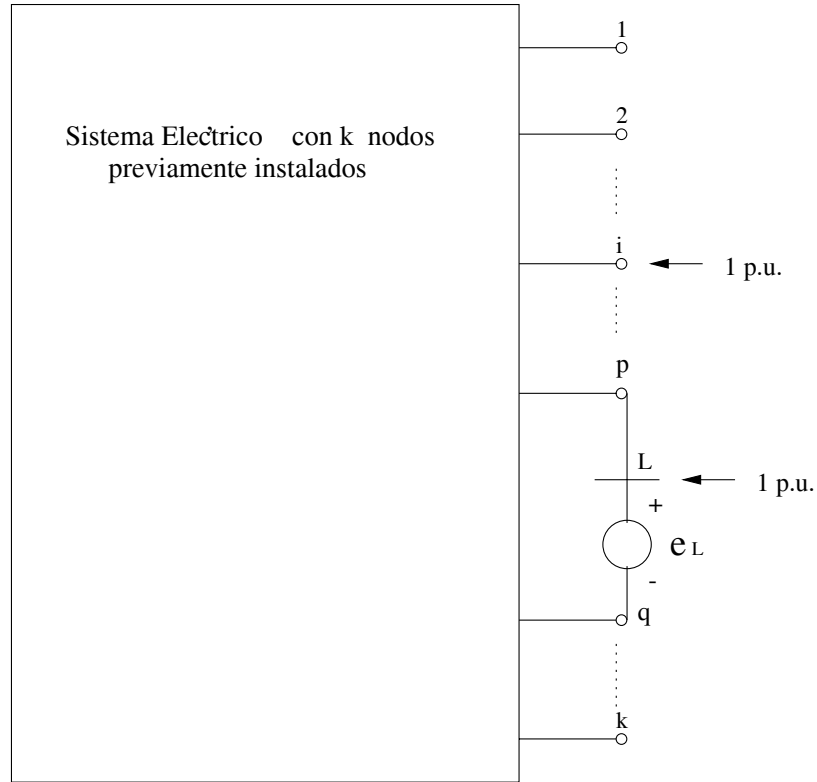


Figura 7.15: Instalación del elemento de enlace p-q sin acoplamiento mutuo

- **Elementos fuera de la diagonal**

Se inyecta una corriente de 1 p.u. en el nodo i y se procede:

Suma de voltajes en el elemento adicionado:

$$V_p - V_L = 0 \quad (1)$$

$$V_L - e_L - V_q = 0 \quad (2)$$

Al sustituir (1) en (2) se obtiene la siguiente ecuación: $V_p - e_L - V_q = 0 \Rightarrow e_L = V_p - V_q$

Por definición se tiene: $Z_{li} = \frac{e_L}{i_i}$, $Z_{pi} = \frac{V_p}{i_i}$ y $Z_{qi} = \frac{V_q}{i_i}$

Al dividir los voltajes nodales por la corriente inyectada en i se obtiene: $\frac{e_L}{i_i} = \frac{V_p}{i_i} - \frac{V_q}{i_i}$

Entonces se concluye que: $Z_{li} = Z_{pi} - Z_{qi}$

- **Elementos de la diagonal**

Se inyecta una corriente de 1 p.u. en el nodo l y se procede:

Suma de voltajes en el elemento adicionado:

$$V_p + \frac{1}{Y_{pq}} - V_L = 0 \quad (1)$$

$$V_L - e_L - V_q = 0 \quad (2)$$

Al sustituir (1) en (2) se obtiene la siguiente ecuación:

$$V_p + \frac{1}{Y_{pq}} - e_L - V_q = 0 \Rightarrow e_L = V_p - V_q + \frac{1}{Y_{pq}}$$

Por definición se tiene: $Z_{ll} = \frac{e_L}{i_L}$, $Z_{pl} = \frac{V_p}{i_L}$ y $Z_{ql} = \frac{V_q}{i_L}$

Al dividir los voltajes nodales por la corriente inyectada en l se obtiene:

$$\frac{e_L}{i_L} = \frac{V_p}{i_L} - \frac{V_q}{i_L} + \frac{1}{Y_{pq}}$$

Entonces se concluye que: $Z_{ll} = Z_{pl} - Z_{ql} + \frac{1}{Y_{pq}}$

Representación de la matriz Z_{bus} al adicionar un enlace. El nodo (l) es un nodo ficticio que será eliminado utilizando el proceso de reducción de Kron.

	1	2		p		q			l
1	Z_{11}	Z_{12}	$\cdots$	Z_{1p}	$\cdots$	Z_{1q}	$\cdots$	Z_{1k}	Z_{1l}
2	Z_{21}	Z_{22}	$\cdots$	Z_{2p}	$\cdots$	Z_{2q}	$\cdots$	Z_{2k}	Z_{2l}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
p	Z_{p1}	Z_{p2}	$\cdots$	Z_{pp}	$\cdots$	Z_{pq}	$\cdots$	Z_{pk}	Z_{pl}
$Z_{bus} = \vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
q	Z_{q1}	Z_{q2}	$\cdots$	Z_{qp}	$\cdots$	Z_{qq}	$\cdots$	Z_{qk}	Z_{ql}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	Z_{k1}	Z_{k2}	$\cdots$	Z_{kp}	$\cdots$	Z_{kq}	$\cdots$	Z_{kk}	Z_{kl}
l	Z_{l1}	Z_{l2}	$\cdots$	Z_{lp}	$\cdots$	Z_{lq}	$\cdots$	Z_{lk}	Z_{ll}

Ejemplo: Emplear el algoritmo para la formación de la matriz Z_{bus} con elementos radiales y de enlace y sin acoplamiento mutuo, para el sistema enmallado de 4 nodos mostrado en la figura 7.16

El orden en el cual han sido adicionados los elementos es el siguiente: (0-3), (3-1), (1-2), (3-4) y (2-4).

La siguiente matriz Z_{Bus} es presentada al momento de ser adicionado el elemento (2-4), que como se observa esta cerrando una malla y es llamado enlace. La adición de este elemento genera un nodo ficticio (l), tal como se muestra en la matriz.

					l
3	1	1	1	1	0
1	1	2	2	1	1
2	1	2	3	1	2
4	1	1	1	2	-1
l	0	1	2	-1	4

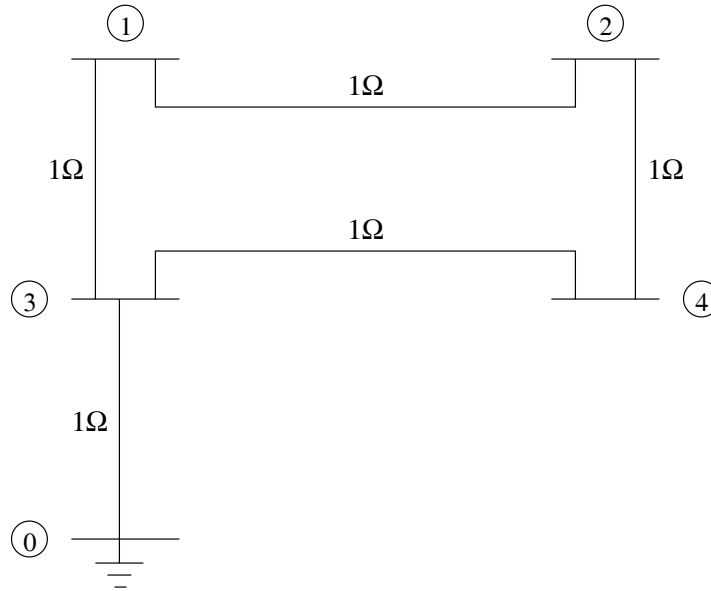


Figura 7.16: Red enmallada de 4 nodos

Al eliminar el nodo ficticio (l) se obtiene:

3	1	1	1	1
1	1	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$
2	1	$1\frac{1}{2}$	2	$1\frac{1}{2}$
4	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$

Reordenando los nodos se obtiene la siguiente matriz, que es similar a la obtenida por el método manual de inyecciones de corriente.

1	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{4}$
2	$1\frac{1}{2}$	2	1	$1\frac{1}{2}$
3	1	1	1	1
4	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	1	$1\frac{3}{4}$

Pasos para el ensamblaje de la Matriz Z_{bus}

- Ordenar los elementos tal que produzcan un circuito conectado. (Tener especial cuidado en el agrupamiento de acoples mutuos sucesivos)
- Iniciar con un elemento conectado a referencia.
- Antes de ensamblar un nuevo elemento, verificar si tiene acoples mutuos con otros elementos e identificar cuales de esos acoples son con líneas previamente ensambladas.
- Construir la matriz $[z]$ primitiva, para obtener $[y]$ primitiva.
- Determinar tipo de línea a ensamblar.

- radial sin acople
- malla sin acople
- radial con acople mutuo
- malla con acople mutuo

Pasos para obtener la matriz $Y_{pq,rs}([y]$ primitiva)

- Conformar la matriz z primitiva con los elementos previamente ensamblados (incluyendo el que se ensamblará con sus correspondientes acoplamientos mutuos).
- Invertir la $[z]$ primitiva encontrada en el punto anterior, para determinar así la $[y]$ primitiva
- Extraer de esta el vector pq (En este se encuentran los acoplamientos mutuos y valor propio de pq).
- Cada vez que se incorpora un nuevo elemento a la matriz Z_{bus} , se repite el proceso; el tamaño de la $[z]$ primitiva crece en tamaño en la medida en que avanza el proceso

Nota: $Y_{pq,rs}$: (Matriz admitancia de acoplamiento entre el elemento pq y los elementos rs previamente ensamblados).

7.9.3 Elemento radial con acoplamiento mutuo

Como se mencionara anteriormente, al instalar un elemento radial, la matriz Z_{bus} crece en una fila y una columna.

En este caso se requiere conocer el valor de los acoplamientos mutuos con los elementos previamente instalados. Así que se conforma la matriz $Z_{primitiva}$ e invierte, para determinar la matriz $y_{primitiva}$. Al observar en la matriz $y_{primitiva}$ la columna correspondiente al elemento que sera instalado, se podrá conocer con que elementos previamente instalados existe acoplamiento mutuo.

Procedimiento para instalar el elemento (p-q) en el sistema, siendo p un nodo previamente instalado y q el nuevo nodo.

- **Elementos fuera de la diagonal**

Se inyecta una corriente de 1 p.u. en el nodo i y se procede:

Sumar voltajes en la nueva rama ensamblada:

$$V_q - \frac{Y_{pq,rs}(V_r - V_s)}{Y_{pq}} - V_p = 0 \Rightarrow V_q = V_p + \frac{Y_{pq,rs}(V_r - V_s)}{Y_{pq}}$$

Por definición se tiene: $Z_{qi} = \frac{V_q}{i_i}$, $Z_{pi} = \frac{V_p}{i_i}$, $Z_{ri} = \frac{V_r}{i_i}$ y $Z_{si} = \frac{V_s}{i_i}$

Al dividir la ecuación de voltaje nodal por la corriente nodal i se tiene:

$$\frac{V_q}{i_i} = \frac{V_p}{i_i} + \frac{Y_{pq,rs}(V_r - V_s)}{Y_{pq}i_i}$$

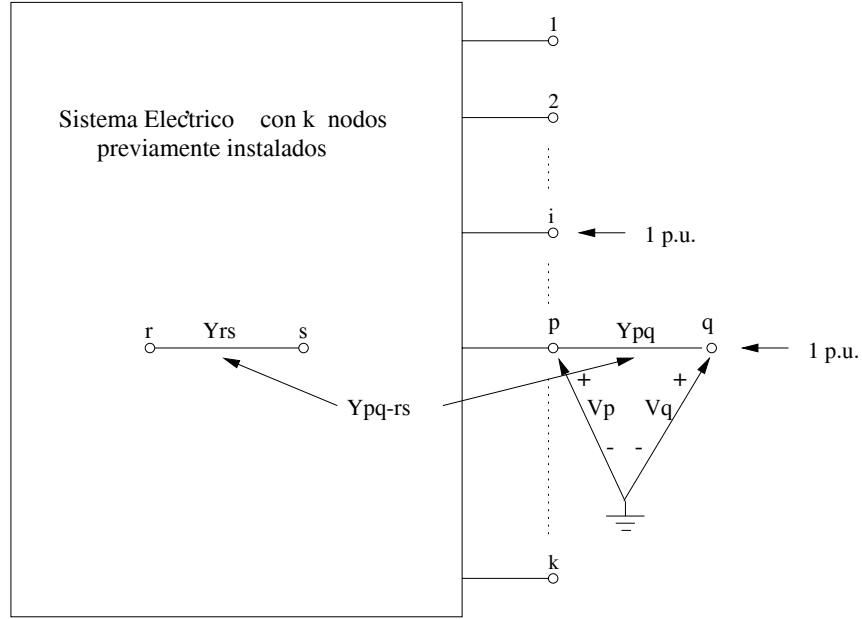


Figura 7.17: Instalación del elemento radial p-q con acoplamiento mutuo

Entonces se concluye que: $Z_{qi} = Z_{pi} + \frac{Y_{pq,rs}(Z_{ri} - Z_{si})}{Y_{pq}}$

$$i_{pq-rs} = Y_{pq,rs}(V_r - V_s)$$

$$V_{pq-rs} = \frac{Y_{pq,rs}(V_r - V_s)}{Y_{pq}}$$

- **Elemento de la diagonal**

Se inyecta corriente de 1 p.u. en el nodo q y se tiene:

Suma de voltajes en la nueva rama ensamblada:

$$V_q - \frac{1}{Y_{pq}} - \frac{Y_{pq,rs}(V_r - V_s)}{Y_{pq}} - V_p = 0$$

Al despejar el voltaje del nodo q se obtiene:

$$V_q = V_p + \frac{1}{Y_{pq}} + \frac{Y_{pq,rs}(V_r - V_s)}{Y_{pq}}$$

Por definición se tiene: $Z_{qq} = \frac{V_q}{i_q}$, $Z_{pq} = \frac{V_p}{i_q}$, $Z_{rq} = \frac{V_r}{i_q}$ y $Z_{sq} = \frac{V_s}{i_q}$

Al dividir la ecuación de voltaje nodal por la corriente nodal q se tiene:

$$\frac{V_q}{i_q} = \frac{V_p}{i_q} + \frac{1}{Y_{pq}} + \frac{Y_{pq,rs}(V_r - V_s)}{Y_{pq}i_q}$$

Entonces se concluye que: $Z_{qq} = Z_{pq} + \frac{1}{Y_{pq}} + \frac{Y_{pq,rs}(Z_{rq} - Z_{sq})}{Y_{pq}}$

Ejemplo: Formar la matriz Z_{bus} para el sistema radial de 5 nodos con acoplamientos mutuos mostrada en la figura 7.18

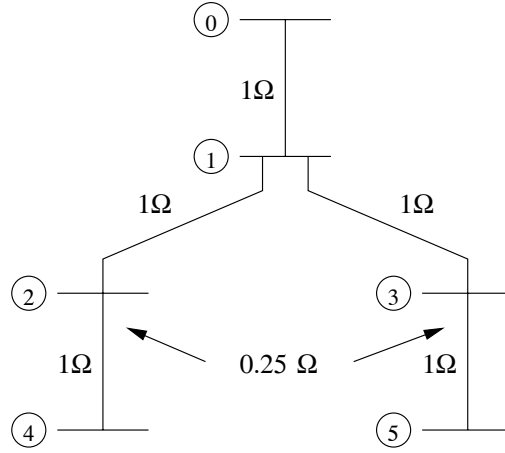


Figura 7.18: Red radial de 5 nodos con acoplamientos mutuos

Los siguientes son los resultados obtenidos de la conformación de la matriz Z_{Bus} con base en el sistema radial con acoplamientos mutuos mostrada en la figura 7.18

$$Z_{bus} =$$

0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
2	0.00	1.00	2.00	1.00	2.00	1.00
3	0.00	1.00	1.00	2.00	1.00	2.00
4	0.00	1.00	2.00	1.00	3.00	1.25
5	0.00	1.00	1.00	2.00	1.25	3.00

7.9.4 Elemento de enlace con acoplamiento mutuo

Procedimiento para instalar el elemento (p-q) en el sistema, siendo p y q nodos previamente instalados, y dicho elemento con acoplamiento mutuo con elementos previamente instalados.

- **Elementos fuera de la diagonal**

Se inyecta una corriente de 1 p.u. en el nodo i y se obtiene:

Suma de voltajes en el elemento adicionado:

$$V_p + \frac{Y_{pq,rs}(V_r - V_s)}{Y_{pq}} - V_l = 0 \quad (1)$$

$$V_l - e_l - V_q = 0 \quad (2)$$

Al sustituir (1) en (2) se obtiene la siguiente ecuación:

$$V_p + \frac{Y_{pq,rs}(V_r - V_s)}{Y_{pq}} - e_l - V_q = 0 \Rightarrow e_l = V_p - V_q + \frac{Y_{pq,rs}(V_r - V_s)}{Y_{pq}}$$

Por definición se conoce que: $Z_{li} = \frac{e_l}{i_i}$, $Z_{pi} = \frac{V_p}{i_i}$, $Z_{ri} = \frac{V_r}{i_i}$ y $Z_{si} = \frac{V_s}{i_i}$

Al dividir los voltajes nodales por la corriente inyectada en i se obtiene:

$$\frac{e_l}{i_i} = \frac{V_p}{i_i} - \frac{V_q}{i_i} + \frac{Y_{pq,rs}(V_r - V_s)}{Y_{pq}i_i}$$

Entonces se concluye que: $Z_{li} = Z_{pi} - Z_{qi} + \frac{Y_{pq,rs}(Z_{ri} - Z_{si})}{Y_{pq}}$

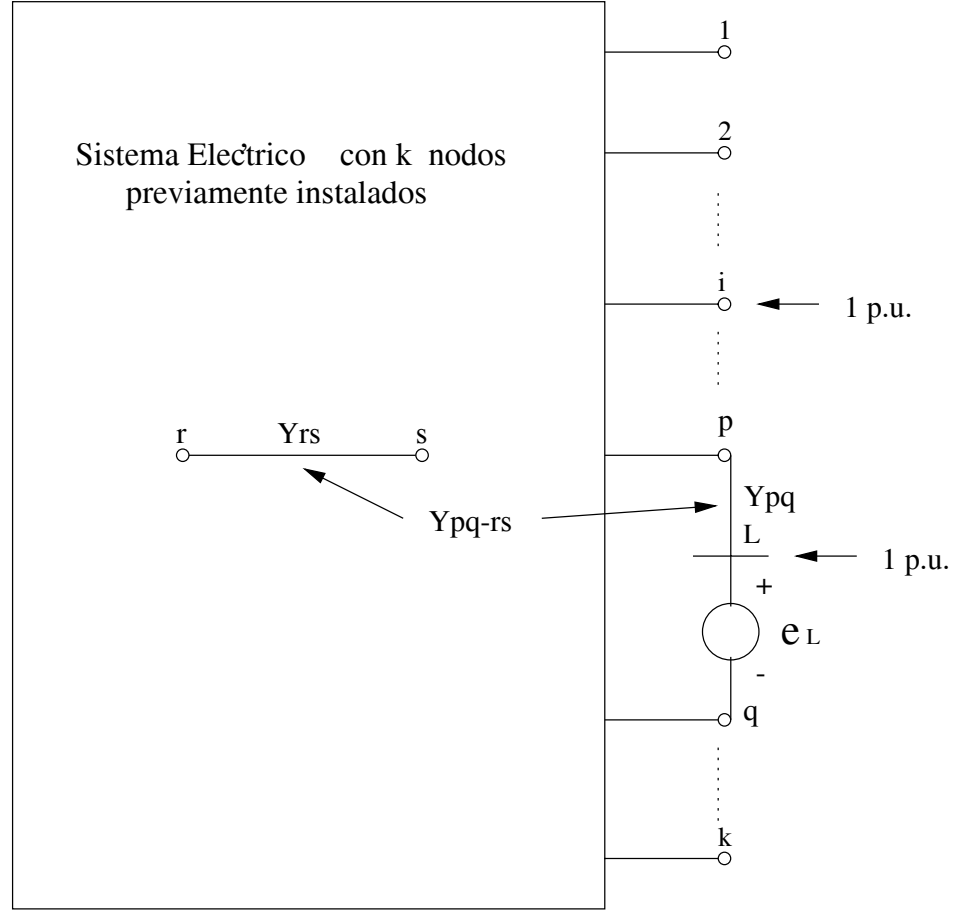


Figura 7.19: Instalación del elemento de enlace p-q con acoplamiento mutuo

- **Elemento de la diagonal**

Se inyecta una corriente de 1 p.u. en el nodo l y se obtiene:

Suma de voltajes en el elemento adicionado:

$$V_p + \frac{1}{Y_{pq}} + \frac{Y_{pq,rs}(V_r - V_s)}{Y_{pq}} - V_l = 0 \quad (1)$$

$$V_l - e_l - V_q = 0 \quad (2)$$

Al sustituir (1) en (2) se obtiene la siguiente ecuación:

$$V_p + \frac{1}{Y_{pq}} + \frac{Y_{pq,rs}(V_r - V_s)}{Y_{pq}} - e_l - V_q = 0 \Rightarrow e_l = V_p - V_q + \frac{1}{Y_{pq}} + \frac{Y_{pq,rs}(V_r - V_s)}{Y_{pq}}$$

Por definición se conoce que: $Z_{ll} = \frac{e_l}{i_l}$, $Z_{pl} = \frac{V_p}{i_l}$, $Z_{rl} = \frac{V_r}{i_l}$ y $Z_{sl} = \frac{V_s}{i_l}$

Al dividir los voltajes nodales por la corriente inyectada en l se obtiene:

$$\frac{e_l}{i_l} = \frac{V_p}{i_l} - \frac{V_q}{i_l} + \frac{1}{Y_{pq}} + \frac{Y_{pq,rs}(V_r - V_s)}{Y_{pq}i_l}$$

Entonces se concluye que: $Z_{ll} = Z_{pl} - Z_{ql} + \frac{1}{Y_{pq}} + \frac{Y_{pq,rs}(Z_{rl} - Z_{sl})}{Y_{pq}}$

7.10 Modificación de la matriz Z_{bus}

La matriz Z_{bus} podrá ser modificada y esto depende del tipo de estudio que se efectúe. Estudios como el de contingencias requieren de constantes alteraciones en la Z_{Bus} . En general en el estudio de los sistemas eléctricos existen una serie de situaciones que requieren de la modificación de sus estructuras. Entre las modificaciones mas empleadas en el análisis de las redes eléctricas se tienen:

- Adicionar elementos.
- Eliminación de elementos
- Cambio de impedancia.
- Cambio del nodo de referencia

Para el caso de eliminación de elementos de la matriz Z_{Bus} , se conecta una línea con impedancia negativa. El valor de esta impedancia debe ser igual al valor que se desee eliminar. Dicha impedancia deberá ser conectada entre los nodos en los cuales se conecta la línea a eliminar.

En la matriz impedancia de acople $[z]$ (primitiva) se adicionan los mismos acoples que tenía dicha línea antes de la eliminación.

Ejercicio: Conformar la matriz impedancia de barra Z_{bus} para el sistema mostrado en la figura 7.20. En el cuadro siguiente se presentan los datos de dicho sistema.

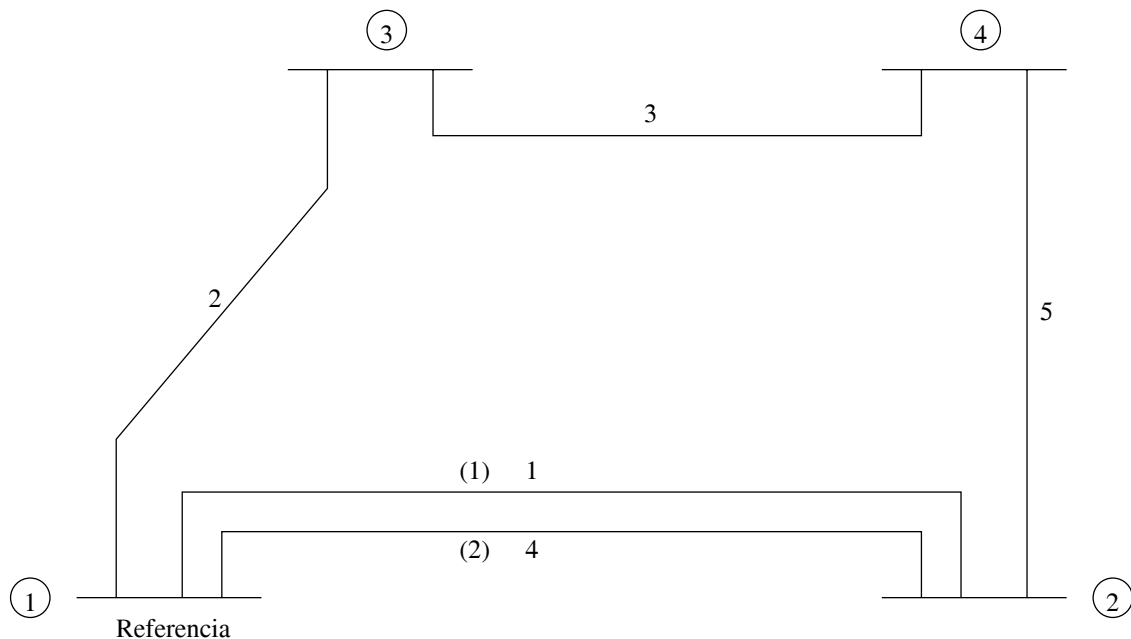


Figura 7.20: Red eléctrica de 4 nodos

Datos del sistema

# del elemento	Propia		Mutua	
	Conexion	Impedancia	Conexión	Impedancia
1	1-2(1)	0.6		
4	1-2(2)	0.4	1-2(1)	0.2
2	1-3	0.5	1-2(1)	0.2
3	3-4	0.5		
5	2-4	0.2		

Con base en la información anterior, seguir el siguiente procedimiento:

- Formar la matriz impedancia Z_{bus}
- Modificar la matriz impedancia obtenida en el punto anterior así:

Adicione un nuevo elemento de la barra 2 a la barra 4 con una impedancia de 0.3 y acoplado con el elemento 5 con una impedancia mutua de 0.1

- Modifique la matriz impedancia obtenida en b. removiendo el nuevo elemento conectado entre 2 y 4.

7.11 Transformaciones sin variación de Potencia

Las pérdidas de potencia en una red de energía eléctrica son descritas como sigue:

$$S_L = V_1 i_1^* + \dots + V_n i_n^*$$

Las mismas escritas en forma vectorial son:

$$S_L = V^T I^*$$

Nota: V e I vectores que contienen valores nodales

Supóngase que se transforman las corrientes nodales

$$I = C I_{nueva}$$

Los voltajes de barra son entonces escritos así:

$$V = Z_{barra} I \text{ y } V_{nueva} = Z_{barra(nueva)} I_{nueva}$$

Se aplica el concepto invarianza en potencia de la siguiente manera:

$$S_L = (Z_{barra} I)^T I^* = I^T Z_{barra} I^*$$

Se reemplaza: $I = CI_{nueva}$

$$S_L = (CI_{nueva})^T Z_{barra} (CI_{nueva})^*$$

$$S_L = I_{nueva}^T C^T Z_{barra} C^* I_{nueva}^*$$

$$S_L = I_{nueva}^T Z_{barra(nueva)} I_{nueva}^*$$

$$Z_{barra(nueva)} = C^T Z_{barra} C^*$$

$$S_L = I_{nueva}^T Z_{barra(nueva)} I_{nueva}^* = V_{nueva}^T I_{nueva}^*$$

$$S_L = V^T C^* I_{nueva}^* = (C^{*T} V)^T I_{nueva}^*$$

$$V_{nueva} = C^{*T} V$$

$$Z_{barra(nueva)} = C^T Z_{barra} C^*$$

Ejemplo: Dado un sistema se desea cambiar el nodo de referencia.

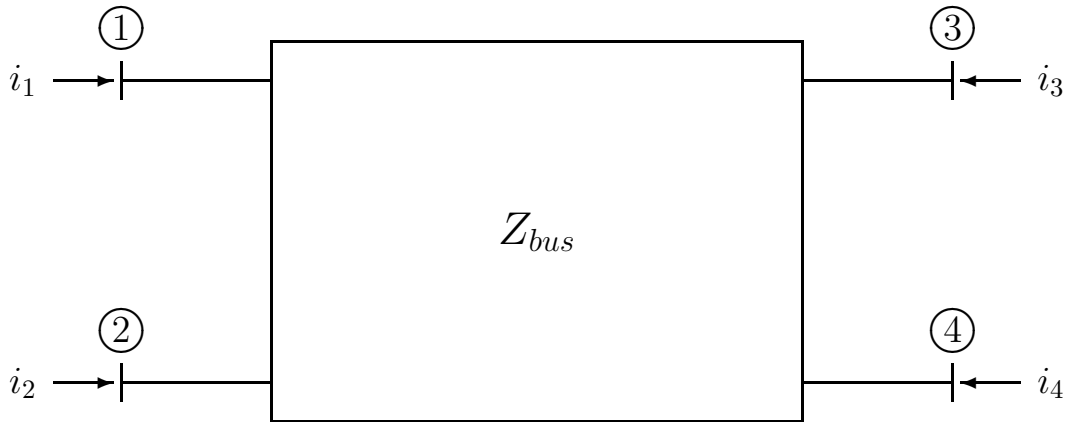


Figura 7.21: Red Eléctrica de 4 nodos

Se aplica la primera ley de Kirchhoff: $i_n + i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$

Si se cambia la referencia a (4), entonces i_4 ya no es independiente porque se puede expresar en términos de las otras cuatro corrientes.

$$i_4 = -i_1 - i_2 - i_3 - i_n$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_n \end{bmatrix}$$

i_1, i_2, i_3 permanecen como al principio, i_4 se reemplaza por i_n que aparece en el nuevo vector de corrientes i_{nueva}

La nueva matriz Z_{bus} es expresada así: $Z_{bus} = C^T Z_{bus} C$

$$Z_{bus(nueva)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} \\ Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$